TEST 1 (40 bodů)

Jméno: ____________________

1. Pin karty se skládá ze čtyř náhodně vybraných číslic 1 až 9, z nichž se žádné neopakuje. Jaká je pravděpodobnost, že všechny čtyři číslice budou liché?

   Tato pravděpodobnost je dána jako: $\frac{podíl\ všech\ možností, jak\ vybrat\ bez\ opakování\ 4\ čísla\ z\ 5}{podíl\ všech\ možností, jak\ vybrat\ bez\ opakování\ 4\ čísla\ z\ 9}$. Jde tedy o variace bez opakování (variace proto, že u pinu záleží na pořadí číslic):

$$\frac{\frac{5!}{(5-4)!}}{\frac{9!}{(9-4)!}} = \frac{120}{3024} \doteq\ 0{,}04$$

2. Nejméně kolikrát musíme hodit kostkou, abychom měli alespoň 80% pravděpodobnost, že padne alespoň jedna šestka?

   Pravděpodobnost, že padne šestka, je 1/6. Pravděpodobnost, že v žádném z *n* hodů **nepadne** šestka, je rovna $\left(\frac{5}{6}\right)^n$. Pravděpodobnost, že alespoň v jednom z *n* hodů padne šestka, je proto rovna $1-\left(\frac{5}{6}\right)^n$, a hledáme takové *n*, pro které je tato pravděpodobnost rovna alespoň 0,8.

$$1-\left(\frac{5}{6}\right)^n \geq 0{,}8$$
$$\left(\frac{5}{6}\right)^n \leq 0{,}2$$
$$n\ \cdot ln\left(\frac{5}{6}\right) \leq ln0{,}2$$
$$n \geq 8{,}82$$

   Proto *n* = 9. Pozor, pro *n* = 8 bude pravděpodobnost menší než 80 %, takže musíme hodit alespoň devětkrát.

3. Hodíme jednou bílou kostkou a dvěma černými. Jaká je pravděpodobnost, že součet čísel na černých kostkách bude větší než číslo na bílé kostce?

   Tato pravděpodobnost je zároveň 1 – P(součet čísel na černých kostkách bude menší nebo roven číslu na bílé kostce).

   Vypíšeme si situace, kdy číslo na bílé kostce rovno součtu čísel na černých kostkách.

číslo na bílé kostce	čísla na černých kostkách
1	-
2	**(1,1)**
3	**(1,2), (2,1)**
4	(1,3), (3,1), (2,2)
5	(2,3), (3,2), (1,4), (4,1)
6	(2,4), (4,2), (1,5), (5,1), (3,3)

   Existuje celkem $6^3 = 216$ možností, co může padnout na jednotlivých kostkách.

   Pravděpodobnost, že součet čísel na černých kostkách bude **roven** číslu na bílé kostce, je roven součtu možností v pravém sloupci tabulky vydělený 216, tedy 15/216.

   Pravděpodobnost, že součet čísel na černých kostkách bude **menší** než číslo na bílé kostce, spočítáme pro každé z čísel 1 až 6 jako součet počtu možností v pravém sloupci tabulky v řádcích nad řádkem, kde se toto číslo nachází, takže například pro číslo 4 sečteme tučně vyznačené možnosti. Tak snadno zjistíme, že je jich 0 + 0 + 1 + 3 + 6 + 10 = 20.

   Hledaná pravděpodobnost je proto:

$$1 - \frac{15 + 20}{216} \doteq 0{,}84$$

4. Ve městě žije 40 lidí s krevní skupinou A, 40 lidí s krevní skupinou B, 10 lidí s krevní skupinou 0, 10 lidí s krevní skupinou AB a jeden upír. Upír má rád osoby s krevní skupinou AB. Jaká je pravděpodobnost, že když v noci zakousne 4 osoby, alespoň jedna z nich bude mít krevní skupinu AB?

   Pravděpodobnost spočítáme jako 1 – P(ani jedna zakousnutá osoba nebude mít krevní skupinu AB), tedy:

$$1 - \frac{\binom{10}{0}\binom{100-10}{4-0}}{\binom{100}{4}} \doteq 0{,}348.$$

5. Uvažujte spojitou náhodnou veličinu X, jejíž rozdělení je popsáno hustotou pravděpodobnosti *f*(*x*) = *k* ·(2*x* + 3) pro *x* z intervalu <−1; 2>, *f*(*x*) = 0 jinak, kde *k* je konstanta. Najděte konstantu *k* a spočítejte střední hodnotu a rozptyl této náhodné veličiny.

$$\int_{-1}^{2} k(2x+3)dx = 1$$

$$k[x^2+3x]_{-1}^{2} = k(4+6-1+3) = 12k = 1$$

Proto *k* = 1/12. Střední hodnota této náhodné veličiny je:

$$\int_{-1}^{2} \frac{1}{12}x(2x+3)dx = \frac{7}{8}$$

Rozptyl této náhodné veličiny je:

$$\int_{-1}^{2} \frac{1}{12}x^2(2x+3)dx - \left(\frac{\mathbf{7}}{\mathbf{8}}\right)^{\mathbf{2}} = \frac{39}{64}$$

6. Spojitá náhodná veličina má rovnoměrné rozdělení na intervalu <a; b> s rozptylem 3. Pravděpodobnost, že náhodná veličina z tohoto rozdělení nabude hodnoty větší než 6, je rovna 1/3. Určete interval <a; b>, střední hodnotu a popište funkci hustoty pravděpodobnosti tohoto rozdělení.

Hustota pravděpodobnosti rovnoměrného rozdělení pro *x* náležící do intervalu <a; b> je

$$f(x) = \frac{1}{b-a}$$

Proto dle zadání:

$$\int_{6}^{b} \frac{1}{b-a}dx = \frac{1}{3}$$

Takže

$$\left[\frac{1}{b-a}\right]_{6}^{b} = \frac{b-6}{b-a} = \frac{1}{3} \; a \; tedy \; (b-a) = 3(b-6)$$

Rozptyl je dán vztahem (b – a)^2/12, a proto dle zadání:

$$\frac{(b-a)^2}{12} = 3 \; takže \; (b-a)^2 = 36$$

Když dosadíme za *b* – *a* v zelené rovnici výraz z modré rovnice, dostaneme:

$$9(b-6)^2 = 36$$

$$(b-6)^2 = 4$$

Rovnice má dvě řešení: *b* = 4 a *b* = 8. Protože pro *b* = 4 platí, že *a* = 10, ale zároveň má být a < b, pak je správným řešením pouze *b* = 8, pro které je *a* = 2. Hledaný interval je tedy <2; 6>, hustota pravděpodobnosti je

$$f(x) = \frac{1}{6} \; pro \; x \in < 2; 8 >, jinak \; 0$$

Střední hodnota je (*a* + *b*)/2 = 5.

7. IQ v populaci má normální rozdělení se střední hodnotou 100 a směrodatnou odchylkou 15. Předpokládejme, že to platí i pro Českou republiku, kde žije v současné době 10 520 000 obyvatel. Albert Einstein měl údajně IQ rovno 160. Kolik obyvatel v ČR má vyšší IQ než Albert Einstein?

   Pravděpodobnost, že náhodná veličina z normálního rozdělení $N(100;\ 15^2)$ nabude hodnoty větší než 160, je dána jako:

$$1 - F(160) = 1 - \phi\left(\frac{160 - 100}{15}\right) = 0{,}00003$$

   Takže počet lidí chytřejších než Einstein je v České republice 10 520 000 · 0,00003 = 216.

8. Teplota (ve stupních Celsia) na Nový rok v 0:00 ve vesnici *A* má rozdělení $N(3;\ 1)$, ve vesnici *B* pak $N(2;\ 3)$, teploty jsou vzájemně nezávislé. Jaká je pravděpodobnost, že na Nový rok v 0:00 bude ve vesnici *A* chladněji než ve vesnici *B*?

   Rozdíl teplot ($T_A - T_B$) má normální rozdělení se střední hodnotou (3 – 2) = 1 a rozptylem 1 + 3 = 4. Hledáme pravděpodobnost, že náhodná veličina z tohoto rozdělení bude menší než 0.

$$F(0) = \phi\left(\frac{0 - 1}{\sqrt{4}}\right) = 0{,}3085$$

9. Bonusový (nepravděpodobnostní) problém pro ty, co se nudí (za 1 extra bod).
   Albert a Bernard se skamarádili s Cheryl a chtějí vědět, kdy má narozeniny. Cheryl jim dá 10 možných dat.

15. května	16. května	19. května
17. června	18. června	
14. července	16. července	
14. srpna	15. srpna	17. srpna

Cheryl řekne Albertovi pouze svůj měsíc narození a Bernardovi pouze svůj den narození.

(1) Albert pak řekne: „Nevím, kdy má Cheryl narozeniny, ale vím, že ani Bernard to neví.“
(2) Bernard na to řekne: „Nejprve jsem sice nevěděl, kdy má Cheryl narozeniny, ale teď už to vím.
(3) Albert následně řekne: V tom případě už také vím, kdy má Cheryl narozeniny.

Otázka: kdy má Cheryl narozeniny?

Postup:

(1) Pokud Albert ví určitě, že ani Bernard neví, kdy má Cheryl narozeniny, musela se narodit v měsíci obsahujícím pouze taková čísla dní, která se tam vyskytují dvakrát. Nemohla se tedy narodit v květnu ani v červnu. Kdyby Cheryl totiž řekla Bernardovi pouze číslo 19, pak by Bernard už její datum narození včetně měsíce znal, protože jiná devatenáctka tam není, ale Albert si je jistý, že ho nezná. Data se tedy zúží na:

14. července	16. července	
14. srpna	15. srpna	17. srpna

(2) Pokud Bernard díky této informací ví určitě, kdy má Cheryl narozeniny, nemohla se narodit čtrnáctého, protože v tom případě by stále nevěděl, jestli je to 14. 7., nebo 14.8. Výběr se zúží na:

	16. července	
	15. srpna	17. srpna

(3) Pokud už Albert díky tomuto ví, kdy má Cheryl narozeniny, a zná přitom jen měsíc, musela se narodit 16. července.