MODELY ROZDĚLENÝCH ZPOŽDĚNÍ. FRIEDMANOVA SPOTŘEBNÍ FUNKCE A PERMANENTNÍ DŮCHOD.

V tomto textu bude nejprve vysvětleno, co jsou to modely rozdělených zpoždění a jak se dělí. Pak se zaměříme na Friedmanovu spotřební funkci.

Když zkoumáme závislost nějakých veličin v čase, často je potřeba vzít v úvahu, že určitá veličina závisí i na svých předchozích hodnotách. Například naše spotřeba určitě závisí i na spotřebě v předchozím roce. Stejně tak ve výrobní sféře závisí objem investic i na předchozích pozorováních (loňská velikost produkce apod.). Důvodů je několik: setrvačnost, institucionální omezení, konzervatismus, či neschopnost učit se z minulých chyb, což nám, čtenářům tohoto textu, určitě nehrozí.

V případě, že do modelu zahrneme zpožděné hodnoty **vysvětlující** proměnné, nazývá se to **model rozdělených zpoždění** (distributed lag). Pokud zahrneme zpožděné hodnoty **vysvětlované** proměnné, jde o **autoregresní model** (autoregressive model). A konečně, pokud zahrneme **obojí**, říká se tomu autoregressive distributed lag model (ADL model) a v češtině nevím jak.

Musíme však nějakým způsobem určit **délku zpoždění** a jeho **strukturu**. Na to neexistuje striktní postup, můžeme vyjít z ekonomické hypotézy či si pomoci informačními kritérii (Akaikeho AIC, Hannan-Quinn, Schwarz), a hledáme model, kde budou tato kritéria co nejmenší.

Máme-li nějaké informace o délce zpoždění, můžeme použít modely konečně rozdělených zpoždění, kdy do modelu zahrneme třeba jen dvě nebo tři zpožděné proměnné. Co se týče struktury koeficientů, čili určení vah parametrů, můžeme předpokládat:

- že trvale rovnoměrně klesají (druhé pozorování má menší vliv než první, třetí než druhé atd.) → **aritmeticky rozdělené zpoždění**
- že váhy nejprve rostou a pak klesají → „**obrácené V**"
- že jejich forma není lineární (klesají, rostou, klesají…) → **aproximace polynomem nízkého stupně**

Teď si s tím ale nebudeme lámat hlavu, protože konečně rozdělené zpoždění tvoří samostatnou otázku.

Jestliže nemáme informace o délce zpoždění, vycházíme většinou z **modelu nekonečně rozdělených zpoždění**. Opět je potřeba určit váhy koeficientů zpožděných vysvětlujících proměnných:

- nejčastěji předpokládáme, že klesají geometrickou řadou → **geometrické zpoždění**
- taky si ale můžeme myslet, že maximální efekt nemá nejpozdější vysvětlující proměnná → **Pascalovo rozdělení**
- další možnosti: racionálně rozdělené zpoždění, gama rozdělené zpoždění, exponenciálně rozdělené zpoždění…

Modely hezky shrnuje následující prezentace:
http://www.powershow.com/view/13905f-ZTE3Y/Time_Series_Econometrics_Distributed_Lag_Modeling_powerpoint_ppt_presentation
Na modely nekonečně rozděleného zpoždění se podíváme podrobněji.

KOYCKOVA TRANSFORMACE

Vyjdeme z jednoduchého modelu nekonečně rozdělených zpoždění:

$$Y_t = \alpha + \beta_0 X_t + \beta_1 X_{t\text{-}1} \ldots + u_t$$

Předpokládejme nyní, že koeficienty β_i tvoří exponenciálně klesající **geometrickou řadu**, čili že zpožděné hodnoty *X* mají stále menší a menší vliv na vysvětlovanou proměnnou: $\beta_i = \beta_0 c^i$. Koeficientu *c* se říká **míra účinku**, hodnotě 1 – *c* se říká **rychlost přizpůsobení**.

- β_0 je **běžný multiplikátor**. Říká, o kolik se zvýší Y_t s růstem X_t o jednotku;
- β_i je **dynamický multiplikátor** zpožděný o *i* období. Říká, o kolik se zvýší Y_{t+i}, pokud se X_t zvedne o jednotku (ale pak se vrátí na svou běžnou úroveň).
- konečný součet několika multiplikátorů se nazývá **střednědobý kumulativní multiplikátor**. Například sečteme-li β_0, β_1 a β_2, dozvíme se, o kolik se zvedne Y_{t+2}, když se nyní X_t zvedne o jednotku a už zůstane vyšší.
- nekonečný součet všech multiplikátorů se nazývá **dlouhodobý rovnovážný multiplikátor** a říká nám, o kolik se zvedne průměrná rovnovážná hodnota Y po nekonečně dlouhém počtu období kvůli trvalému zvýšení X o jednotku (X_t se v běžném období zvedne o jednotku a zůstane o jednotku vyšší i nadále). Jde o součet nekonečné geometrické řady: $\sum_{i=0}^{\infty} \beta_i = \beta_0 \,/\, (1 - c)$**.**

Příklad:

Máme farmu a zjišťujeme, kolik pytlů brambor sklidíme (Y) v závislosti na množství hnojiva, které použijeme (X).

$\alpha = 3,\ \beta_0 = 4, c = 0{,}5$
$\beta_1 = 0{,}5 \cdot 4 = 2$
$\beta_2 = 0{,}5 \cdot 0{,}5 \cdot 4 = 1$
$\beta_3 = 0{,}5 \cdot 0{,}5 \cdot 0{,}5 \cdot 4 = 0{,}5$
… atd. Proto:
$Y_t = 3 + 4X_t + 2X_{t-1} + 1X_{t-2} + 0{,}5X_{t-3} \ldots + u_t$

- *Jestliže letos použijeme o 1 kg hnojiva více (X_t se zvýší o jednotku), budeme mít tento rok o 4 pytle brambor více = běžný multiplikátor.*
- *Něco z letošního navýšení hnojiva v zemi zůstane i příští rok (snad, protože autorka tohoto textu nemá moc tušení, jak to je s hnojením brambor), takže díky letošnímu jednotkovému navýšení množství hnojiva sklidíme příští rok o 2 pytle brambor více = dynamický multiplikátor.*
- *Jestliže použijeme v roce 2010, 2011 a 2012 o 1 kg hnojiva více, budeme mít v roce 2012 o 7 pytlů brambor více = střednědobý kumulativní multiplikátor.*
- *Trvalé navýšení ročního objemu hnojiva o 1 kg povede k tomu, že budeme sklízet o 4 / (1 – 0,5) = 8 pytlů brambor více.*

Teď je tu ale zjevně problém. Máme nekonečný počet parametrů, což je docela hodně, jak je tedy máme odhadnout? Není ale třeba truchlit, stačí si pomoci následujícím postupem, kterému se říká Koyckova transformace.

1. Přepíšeme si výše uvedený model s využitím *c*: $Y_t = \alpha + \beta_0 X_t + \beta_0 c X_{t-1} + \beta_0 c^2 X_{t-2} \ldots + u_t$
2. Totéž si napíšeme pro Y_{t-1}: $Y_{t-1} = \alpha + \beta_0 X_{t-1} + \beta_0 c X_{t-2} + \beta_0 c^2 X_{t-3} \ldots + u_{t-1}$
3. Druhou rovnici vynásobíme koeficientem *c* a odečteme od první rovnice, čímž dostaneme:
   $Y_t - cY_{t-1} = \alpha(1-c) + \beta_0 X_t + \beta_0 c X_{t-1} + \beta_0 c^2 X_{t-2} \ldots - \beta_0 c X_{t-1} - \beta_0 c^2 X_{t-2} \ldots \ldots + (u_t - cu_{t-1})$
4. Stejné prvky se odečtou. Převedeme všechno kromě Y_t na pravou stranu.
5. A dostaneme model:

$$Y_t = \alpha(1-c) + \beta_0 X_t + cY_{t-1} + v_t, \text{ kde } v_t = u_t - cu_{t-1}$$

Jako bychom tedy vlastně veškeré zpožděné hodnoty X shrnuli do proměnné Y_{t-1}. Dostali jsme tak autoregresní model, kde náhodná složka představuje *MA*(1) proces.

Výhodou je, že:

- máme konečný počet parametrů, což zvládneme odhadnout pomocí MNČ;
- vyhneme se multikolinearitě, se kterou bychom mohli mít problém při zahrnutí velkého počtu zpožděných vysvětlujících proměnných;
- zvětší se počet stupňů volnosti.

Nevýhodou je, že:

- náhodná složka je zkorelovaná (nutno řešit problém autokorelace);
- v modelu je proměnná Y_{t-1}, ta ale není nezávislá na náhodné složce. Náhodná složka v_t totiž obsahuje u_{t-1}, a to přímo ovlivňuje Y_{t-1}. Proto odhady nebudou nestranné, vydatné, ani konzistentní (pokud by byla Y_{t-1} nezávislá na náhodné složce, byly by aspoň asymptoticky vydatné a konzistentní – pomoci si můžeme tak, že místo Y_{t-1} dáme do modelu její vyrovnané hodnoty odhadnuté z regrese na X_{t-1});
- pro zjištění autokorelace nelze použít DW test (použijme *Durbinovo h*, příp. pro vyšší řády autokorelace *BG test*).

Poznámky:

- průměrná délka zpoždění je $c/(1-c)$. Říká, za jak dlouho proběhne polovina změny proměnné Y vyvolaná jednotkovou změnou X. Je to míra rychlosti reakce Y na změnu X.
- rozptyl zpoždění je $c/(1-c)^2$
- někdy se může vynechávat úrovňová konstanta
- někdy lze použít modifikovanou Koyckovu transformaci, podle níž několik zpoždění určíme z původního modelu a u zbytku pak předpokládáme, stejně jako výše, že klesají geometrickou řadou. Například pokud ponecháme v modelu, z něhož vynecháme úrovňovou konstantu, první dva váhové koeficienty bez omezení, dostaneme $Y_t = \beta_0 X_t + \beta_0 X_{t-1} + \beta_2 \sum_{i=0}^{\infty} c^i X_{t-i-2} + u_t$, což po Koyckově transformaci povede na model $Y_t = \beta_0 X_t + (\beta_1 - c\beta_0) X_{t-1} + (\beta_2 - c\beta_1) X_{t-2} + cY_{t-1} + v_t$.

FRIEDMANOVA SPOTŘEBNÍ FUNKCE

Podle Friedmana **permanentní spotřeba závisí na tzv. permanentním důchodu** (příjmy z práce, z majetku), nikoli na běžném důchodu.

Co je to permanentní důchod? Je to neměřitelná proměnná, jde o důchod, který můžeme očekávat, přičemž toto očekávání formujeme na základě našeho vzdělání, majetku atd. Běžný důchod se skládá z permanentního důchodu a tranzitivní složky, čili běžný důchod = permanentní důchod + tranzitivní složka. Tedy běžný důchod kolísá kolem permanentního důchodu.

Obdobně Friedman definuje i permanentní spotřebu. Skutečná spotřeba kolísá kolem permanentní spotřeby, skládá se z permanentní spotřeby + tranzitivní složky (občas utratíme víc, občas méně, může jít o nečekané výdaje typu zubař apod.). Důležité je, že tranzitivní složka důchodu a spotřeby jsou náhodné veličiny s průměrem nula a konstantním rozptylem.
Friedman předpokládá, že permanentní spotřeba je přímo úměrná permanentnímu důchodu:

$$C^p = kY^p$$

Úrovňová konstanta je nulová. Koeficient *k* je mezní sklon ke spotřebě vzhledem k permanentnímu důchodu. Tento koeficient závisí na spotřebních zvyklostech a na úrokové míře. Obvykle se pohybuje v rozmezí 0,8-0,9, což vlastně znamená, že bohatství spotřebitele neustále roste. Závisí ale i na proporci bohatství drženého v podobě fyzických a finančních aktiv. Můžeme tedy upřesnit funkční vztah jako $C^p = k(r,w,z)Y^p$, kde *z* jsou spotřební zvyklosti, *w* je podíl fyzických a finančních aktiv a *r* je úroková míra.

Průměrný sklon ke spotřebě je dlouhodobě konstantní, i když krátkodobě může klesnout: při zvýšení důchodu spotřebitel neví, zda bude toto zvýšení trvalé, proto se spotřeba zvedne jen o trochu nebo vůbec. Teprve pokud zjistí, že jde o trvalou změnu, vzroste i spotřeba, takže podíl spotřeby na důchodu bude dlouhodobě konstantní.

Co by se stalo, kdyby byla data generována v souladu s Friedmanovou hypotézou, ale my místo toho odhadli keynesiánský model $C_i = \beta_1 + \beta_2 Y_i$? Ve skutečnosti by permanentní spotřeba závisela na permanentním důchodu. Tranzitivní složka je náhodnou veličinou, která tvoří součást napozorované, běžné veličiny. Pokud bychom pracovali s běžným důchodem a běžnou spotřebou namísto permanentních veličin, pak by tyto tranzitivní složky představovaly chybu měření (pracovali bychom s napozorovanými hodnotami místo jejich skutečných, permanentních hodnot, které pozorovat nemůžeme). Chyba měření vysvětlované proměnné povede k většímu rozptylu náhodné složky, a co hůř, chyba měření vysvětlující proměnné povede k nekonzistentním odhadům parametrů – odhad β_2 bude podhodnocen, odhad β_1 nadhodnocen. Například pokud by byl skutečný vztah takový, že $C^p = 0{,}9\,Y^p$, a my bychom odhadli model $C_i = \beta_1 + \beta_2 Y_i$, mohlo by nám klidně vyjít něco jako $C_i = 443 + 0{,}75\,Y_i$. Což by bylo od skutečnosti dost daleko.

Samozřejmě je otázkou, co dělat, když naši hypotézu stavíme na permanentním důchodu a spotřebě, které jsou obě neměřitelnými, nepozorovatelnými proměnnými. Musíme je tedy nějak převést na pozorovatelné veličiny. Můžeme si pomoci hypotézou částečného přizpůsobení, nebo hypotézou adaptivních očekávání. Oba tyto modely vychází z Koyckovy transformace, od níž se liší teoretickým zdůvodněním (jsou založeny na nějaké ekonomické hypotéze). Stručně by se daly popsat takto:

Hypotéza adaptivních očekávání

Hypotéza adaptivních očekávání pracuje s optimální, neměřitelnou hodnotou **vysvětlující proměnné**, tedy spotřeba závisí na permanentním důchodu (neměřitelném). Podrobněji viz otázka Modely adaptivních očekávání a jejich aplikace.

HYPOTÉZA ČÁSTEČNÉHO PŘIZPŮSOBENÍ

Hypotéza částečného přizpůsobení pracuje s optimální, neměřitelnou hodnotou **vysvětlované proměnné**, která je funkcí vysvětlující proměnné. Obecný tvar (*Y* zde neznačí důchod, ale jakoukoli vysvětlovanou proměnnou!) je $Y_t^P = \beta_1 + \beta_2 X_t + u_t$. Skutečná změna vysvětlované proměnné je pouze proporcionální požadované změně: $Y_t - Y_{t-1} = d(Y_t^P - Y_{t-1})$, kde *d* je koeficient přizpůsobení a 1/*d* je rychlost přizpůsobení.

Příklad použití:

Relativní vybavenost domácnosti předmětem dlouhodobé spotřeby (žádoucí úroveň vybavení) vzhledem k běžnému disponibilnímu důchodu. Při růstu důchodu se skutečná relativní vybavenost nemusí přizpůsobit okamžitě kvůli setrvačnosti apod. K plnému přizpůsobení by došlo jen v případě, že by se *d* rovnalo 1. Naopak pokud by se *d* rovnalo 0, pak by domácnost na novou výši důchodu vůbec nereagovala.

V souladu s touto hypotézou bývá někdy specifikována právě i Friedmanova spotřební funkce, a to tak, že permanentní spotřeba je funkcí běžného důchodu: $C_t^P = \beta_1 + \beta_2 Y_t + u_t$. Tento model vyjadřuje **dlouhodobou závislost** žádoucí úrovně spotřeby na běžném důchodu.

- Optimální, permanentní spotřeba podle takto specifikované hypotézy závisí jednak na současné požadované hodnotě spotřeby, jednak na hodnotě spotřeby v předchozím období: $C_t - C_{t-1} = d(C_t^P - C_{t-1})$, čili $C_t = dC_t^P + (1-d)C_{t-1}$, kde *d* je již zmiňovaný **koeficient přizpůsobení**. Je patrné, že současná skutečná hodnota spotřeby je váženým průměrem současné požadované hodnoty spotřeby a hodnoty spotřeby v předchozím období. Pro *d* = 0 se tedy spotřebitel plně adaptuje na předchozí období. Naopak pro *d* = 1 se skutečná spotřeba vůbec neřídí minulou výší spotřeby a přizpůsobuje se požadované výši spotřeby.
- Úpravou získáme model autoregresní model ve tvaru $C_t = \beta_1 d + \beta_2 d Y_t + (1-d) C_{t-1} + u_t^+$, kde $u_t^+ = du_t$. Ten lze přepsat jako $C_t = \alpha_1 + \alpha_2 Y_t + \alpha_3 C_{t-1} + u_t^+$. Takto specifikovaný model vyjadřuje **krátkodobou reakci** běžné spotřeby na běžném důchodu a na spotřebě v předchozím období. Formálně je shodný s Koyckovým modelem. Protože ale náhodná složka není autokorelovaná, lze pomocí MNČ získat konzistentní odhady. Pokud bude koeficient *d* roven nule (přizpůsobení je nulové), pak domácnost vůbec nebude reagovat na současnou výši důchodu, ale bude se řídit jen minulou spotřebou. Pokud bude roven jedné, pak se domácnost nestará o to, co bylo, ale řídí se současnou výší důchodu.

SPOJENÍ OBOU HYPOTÉZ:

- Obě hypotézy můžeme spojit a psát model ve tvaru $Y_t^P = \beta_1 + \beta_2 X_t^P + u_t$
- Pak bychom Y generovali v souladu s procesem částečného přizpůsobení a X v souladu s procesem adaptivních očekávání
- Dostali bychom model $Y_t = \beta_0 dg + \beta_1 dg X_t + [(1-d) + (1-g)] Y_{t-1} - (1-d)(1-g)Y_{t-2} + [du_t - (1-g) u_{t-1}]$, který bychom mohli přepsat jako $Y_t = \alpha_1 + \alpha_2 Xt + \alpha_3 Y_{t-1} + \alpha_4 Y_{t-2} + ut^*$. Ten je ale nelineární v původních parametrech a opět má autokorelovanou náhodnou složku.

Příklad

$C_t = \beta_1 d + \beta_2 d Y_t + (1-d) C_{t-1} + u_t^+,$

$C_t = \alpha_1 + \alpha_2 Y_t + \alpha_3 C_{t-1} + u_t^+$

$\widehat{Ct} = 0{,}9 + 0{,}6\, Y_t + 0{,}2\, C_{t-1}$

***Krátkodobý mezní sklon ke spotřebě** je roven $\beta_2 d = \alpha_2 = 0{,}6$.*
Hodnota $\alpha_3 = (1 - d) = 0{,}2$ říká, že kdyby byla minulá spotřeba o 1 milion větší, byla v spotřeba v současném období 200 tisíc větší.
*Hodnota $d = 0{,}8$ je **rychlost přizpůsobení**. Tedy zdá se, že se rychle přizpůsobujeme očekávané spotřebě a nestaráme se tolik o to, co bylo dřív.*
*Hodnotu β_2 můžeme dopočítat jako $\alpha_2/d = 0{,}6 / (1 - 0{,}2) = 0{,}75$. A tohle je **dlouhodobý mezní sklon ke spotřebě**. Kvůli rychlému přizpůsobení jsou si krátkodobý a dlouhodobý sklon ke spotřebě docela blízké.*

PŘÍKLAD

Je rok 2010 a farmář chce prozkoumat závislost počtu vajec jedné slepice (Y) v ks na množství krmiva (X) v kg. Předpokládá, že může použít model geometricky rozděleného zpoždění. Myslí si, že když bude slepici letos lépe krmit, bude mít tato slepice více vajec i v dalších letech. Pomůže si Koyckovou transformací, odhaduje tedy model ve tvaru $Y_t = \alpha(1 - c) + \beta_0 X_t + cY_{t\text{-}1} + v_t$

Odhad je následující $\widehat{Y}_t = 20 + 5X_t + 0{,}2\,Y_{t\text{-}1}$

Co z toho farmář může vyvodit?

1) Když letos slepici navýší krmivo o 1 kg, bude mít tato slepice letos o ______ vajec více.
2) Když letos slepici navýší krmivo o 1 kg, ale další rok jí ho opět sníží na původní množství, bude mít tato slepice v roce 2011 o ______ vajec více.
3) Když jak letos, tak příští rok slepici navýší krmivo o 1 kg, bude mít díky tomu tato slepice v roce 2011 o ______ vajec více.
4) Když se rozhodne zvýšit slepici krmivo trvale o 1 kg ročně, bude mít z dlouhodobého hlediska o ____ vajec ročně více.

Odpovědi:

1) 5, protože běžný multiplikátor $\beta_0 = 5$
2) 1, protože dynamický multiplikátor $\beta_1 = c\beta_0 = 0{,}2{\cdot}5 = 1$
3) 6, protože střednědobý kumulativní multiplikátor $\beta_0 + \beta_1 = 6$
4) 6,25, protože dlouhodobý kumulativní multiplikátor $= \beta_0 / (1 - c) = 5/0{,}8 = 6{,}25$

ZDROJE

Dougherty, C.: Introduction to econometrics, Oxford University Press 2007.

Hušek, R: Ekonometrická analýza. Nakladatelství Oeconomica, Praha 2007.

Hušek, R.: Aplikovaná ekonometrie. Nakladatelství Oeconomica, Praha 2009.