# VEKTOROVÉ AUTOREGRESE. APLIKACE V PROGNÓZOVÁNÍ.

Vektorové autoregrese (VAR) se používají tehdy, když chceme zkoumat časové řady dvou či více proměnných. Je sice možné za tím účelem použít dynamické modely simultánních rovnic (MSR), to ale může přinášet problémy, neboť je u nich potřeba hlídat, zda nejsou podidentifikované či přeidentifikované, a také je třeba zkoumané proměnné apriori rozdělit na endogenní a exogenní.

Alternativním postupem jsou právě VAR, které mají ateoretický charakter. V modelech VAR jsou **proměnné ze všech zkoumaných časových řad apriorně považovány za endogenní a mají stejnou maximální délku zpoždění**. Modely se snadno odhadují „obyčejnou" MNČ nebo MZNČ (příp. MMV). Modely VAR mají 2 rozměry: počet endogenních proměnných *m* (to je zároveň počet rovnic modelu) a délku zpoždění *p*.

Například bychom mohli zkoumat časovou řadu *HDP* a nabídky peněz (*MS*). Specifikujeme nejprve MSR, přičemž obě proměnné považujeme za endogenní a žádné exogenní proměnné v modelu neuvažujeme. Strukturní tvar MSR specifikujeme jako:

$$HDP_t = \beta_1 + \beta_2 MS_t + \beta_3 HDP_{t\text{-}1} + u_{t1}$$
$$MS_t = \beta_4 + \beta_5 HDP_{t\text{-}1} + \beta_6 MS_{t\text{-}1} + u_{t2}$$

Rovnice lze s trochou úprav převést do **neomezeného redukovaného tvaru**, ve kterém jsou vysvětlujícími proměnnými pouze predeterminované proměnné:

$$HDP_t = \delta_1 + \pi_{11} HDP_{t\text{-}1} + \pi_{12} MS_{t\text{-}1} + v_{t1}$$
$$MS_t = \delta_2 + \pi_{21} HDP_{t\text{-}1} + \pi_{22} MS_{t\text{-}1} + v_{t2}$$

Toto je zároveň i model **VAR prvního řádu ve standardním tvaru**. Konkrétně jde o VAR(1) model, protože zpoždění má délku 1. Model lze zapsat v maticovém vyjádření:

$$\boldsymbol{Y_t} = \boldsymbol{\delta} + \boldsymbol{\Pi_1 Y_{t\text{-}1}} + \boldsymbol{v_t} \quad \text{čili} \quad \begin{pmatrix} HDP_t \\ MS_t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \delta_1 \\ \delta_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \pi_{11} & \pi_{12} \\ \pi_{21} & \pi_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} HDP_{t-1} \\ MS_{t\mp1} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} v_{1t} \\ v_{2t} \end{pmatrix}$$

Pro delší zpoždění by model měl tvar $\boldsymbol{Y_t} = \boldsymbol{\delta} + \boldsymbol{\Pi_1 Y_{t\text{-}1}} + \boldsymbol{\Pi_2 Y_{t\text{-}2}} + \boldsymbol{\ldots} + \boldsymbol{\Pi_p Y_{t\text{-}p}} + \boldsymbol{v_t}$. Matice $\boldsymbol{\Pi_i}$ je *m* x *m* matice parametrů endogenních proměnných zpožděných o *i* období.

---

Strukturní tvar VAR(1) modelu (když vynecháme úrovňovou konstantu): $\boldsymbol{Ay_t} = \boldsymbol{By_{t\text{-}1}} + \boldsymbol{v_t}$.

Neomezený redukovaný (standardní) tvar VAR(1) modelu: $\boldsymbol{Y_t} = \boldsymbol{\delta} + \boldsymbol{\Pi_1 Y_{t\text{-}1}} + \boldsymbol{v_t}$

---

V analýze časových řad je důležitá otázka jejich stacionarity, proto se zastavíme u testování stacionarity a jednotkových kořenů.

## TRENDOVĚ A DIFERENČNĚ STACIONÁRNÍ PROCESY

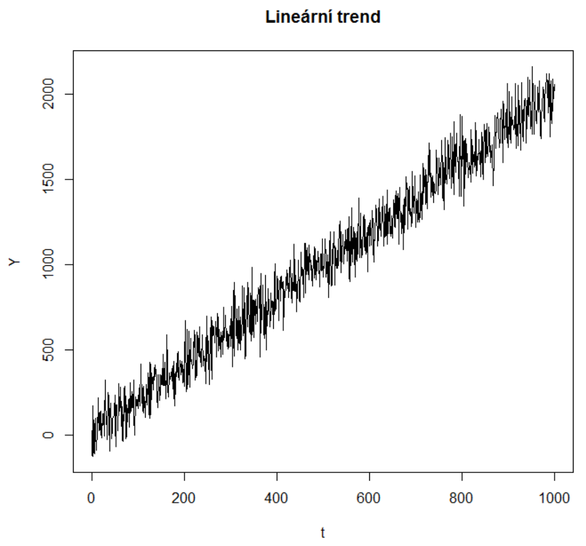
Silná stacionarita znamená, že pravděpodobnostní chování stochastického procesu nezávisí na čase, všechny momenty jsou konstantní a konečné.
Slabá stacionarita znamená, že aspoň střední hodnota, rozptyl a kovariance stochastického procesu jsou konstantní, konečné a nezávisí na čase.

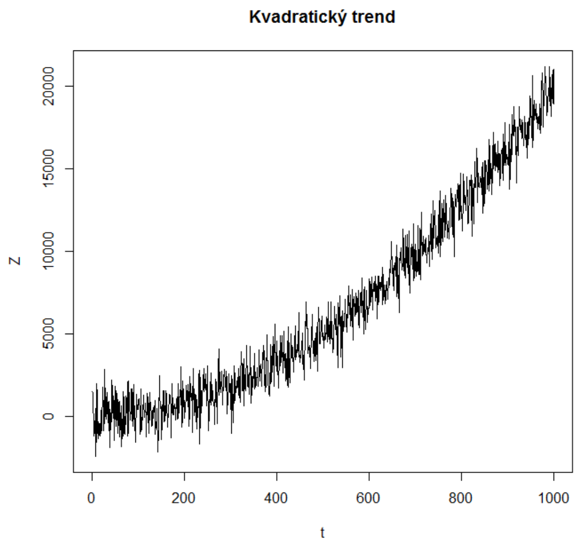
Stacionárním procesům se říká integrované procesy prvního řádu, *I*(0) procesy. Proměnné, které nejsou stacionární, obsahují trend. Tento trend může být deterministický (jde o trendově stacionární proces) nebo stochastický (jde o diferenčně stacionární proces).

### TRENDOVĚ STACIONÁRNÍ PROCESY jsou procesy ve tvaru:

$$Y_t = \beta_0 + \beta_1 t + u_t.$$

Tento proces není stacionární, protože střední hodnota $E(Y_t)$ zjevně závisí na $t$. Proces $Z_t = Y_t - \beta_1 t = \beta_0 + u_t$ už je ovšem stacionární. Pokud lze stochastický proces stacionarizovat zahrnutím trendu do modelu, říkáme mu trendově stacionární proces. Trend nemusí být pouze lineární, nýbrž i kvadratický, logaritmický apod.




### DIFERENČNÍ STACIONÁRNÍ PROCESY jsou procesy ve tvaru

$$Y_t = Y_{t-1} + u_t.$$

resp.

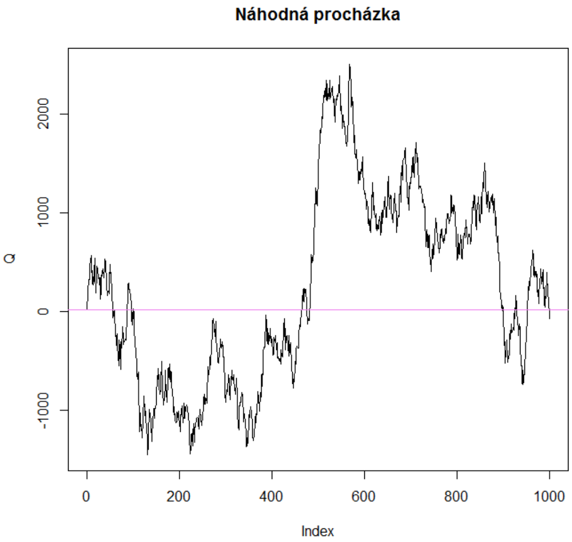
$$Y_t = \beta_0 + Y_{t-1} + u_t.$$

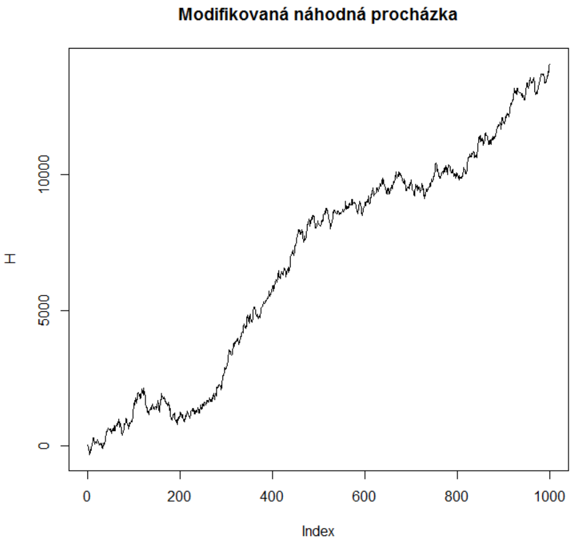
Prvnímu modelu se říká model náhodné procházky. Střední hodnota procesu se sice v čase nemění, ale rozptyl vykazuje trend, protože

$$Y_1 = Y_0 + u_1$$
$$Y_2 = Y_1 + u_2 = Y_0 + u_1 + u_2$$
$$\dots$$
$$Y_t = Y_0 + \sum_{s=1}^{t} u_s$$

Proto $E(Y_t) = Y_0$, avšak $var(Y_t) = t\sigma_t^2$.

Druhému modelu se říká model modifikované náhodné procházky (random walk with drift). Pro něj platí, že $E(Y_t) = t\beta_0 + Y_0$ a $var(Y_t) = t\sigma_t^2$.




Kombinací je model modifikované náhodné procházky s trendem:

$$Y_t = \beta_0 + \beta_1 t + Y_{t-1} + u_t.$$

Vliv exogenního šoku v případě diferenčně stacionárních modelů časem neslábne, nýbrž se kumuluje. Pokud bychom na tyto modely použili MNČ, důsledky by byly následující:

- nekonzistence odhadové funkce MNČ, nemožnost použít běžné postupy statistické indukce, výsledky *t*-testů a *F*-testů neodpovídají skutečnosti;
- riziko zdánlivé regrese: může se stát, že mezi dvěma veličinami neexistuje žádný vztah, ale protože vykazují podobný trend, naoko se jeví jako závislé (v regresi je $R^2$ vysoký).

U těchto modelů je tedy vhodné přejít nejprve k prvním diferencím. Modely

$$\Delta Y_t = u_t.$$

resp.

$$\Delta Y_t = \beta_0 + u_t.$$

jsou již stacionární. Pokud lze proces stacionarizovat přechodem k **prvním diferencím**, říká se mu proces integrovaný řádu 1, *I*(1) proces.

Pokud bychom však nesprávně použili první diference u stacionární časové řady nebo trendově stacionární časové řady či naopak chtěli diferenčně stacionární řadu stacionarizovat zahrnutím trendu, projevilo by se to zdánlivou autokorelací. Je proto vhodné nejprve testovat stacionaritu a zjistit, jestli je proces stacionární, trendově stacionární či diferenčně stacionární, abychom věděli, jak s ním máme pracovat. K tomu slouží testy Dickeye a Fullera.

## TESTY DICKEYE A FULLERA

Testy Dickeye a Fullera (testy jednotkového kořene) vycházejí z modelu specifikovaného jedním z následujících způsobů:

$$\Delta Y_t = (\alpha - 1)\, Y_{t-1} + u_t$$
$$\Delta Y_t = \gamma + (\alpha - 1)\, Y_{t-1} + u_t$$
$$\Delta Y_t = \gamma + \delta t + (\alpha - 1)\, Y_{t-1} + u_t$$

To, který model použít, závisí na tom, jak je nejspíš (například podle grafu) generován zkoumaný proces, tzn. zda jde o model náhodné procházky, modifikované náhodné procházky či modifikované náhodné procházky s trendem.

Může se testovat nulová hypotéza, že $\alpha = 1$. V případě platnosti nulové hypotézy by například v první rovnici platilo, že $\Delta Y_t = u_t$, tedy $Y_t = Y_{t-1} + u_t$, takže proces by obsahoval jednotkový kořen a nebyl by stacionární, obdobně v dalších rovnicích. Odhadne se v tom případě uvedená rovnice a spočítá se testová statistika $\tau = (\alpha - 1) / s_\alpha$, která se porovná s kritickými hodnotami, jež tabelovali Dickey a Fuller (statistika nemá standardní t-rozdělení).

U poslední rovnice se může také testovat sdružená hypotéza, že $\alpha = 1$ a $\delta = 0$. Pak se odhadne neomezený model $\Delta Y_t = \gamma + \delta t + (\alpha - 1)\, Y_{t-1} + u_t$ a omezený model $\Delta Y_t = \gamma + u_t$. Zjistí se nevysvětlený součet čtverců reziduí z jednotlivých modelů a spočítá se testová statistika, která však opět nemá standardní F-rozdělení, takže je ji potřeba porovnat se zvláštními tabulkami, které sestavili Dickey a Fuller.

V obou případech platí, že **pokud nezamítneme nulovou hypotézu, neakceptujeme hypotézu neexistence jednotkového kořene.** Tedy "**chceme nulovou hypotézu zamítnout**," protože pak tam asi jednotkový kořen není.

Tyto testy předpokládají, že náhodné složky jsou sériově nezávislé. Protože to často neplatí, existují ještě modifikované DF testy (Augmented Dickey Fuller test), které využívají modifikovaných verzí modelů (*r* je řád autokorelace).

$$\Delta Y_t = (\alpha - 1)\, Y_{t-1} + \sum_{j=1}^{r-1} \alpha_j \Delta Y_{t-j} + u_t$$
$$\Delta Y_t = \gamma + (\alpha - 1)\, Y_{t-1} + \sum_{j=1}^{r-1} \alpha_j \Delta Y_{t-j} + u_t$$
$$\Delta Y_t = \gamma + \delta t + (\alpha - 1)\, Y_{t-1} + \sum_{j=1}^{r-1} \alpha_j \Delta Y_{t-j} + u_t$$

## KOINTEGRACE

Uvažujme dvě proměnné, které jsou integrované stejného řádu, např. obě jsou *I*(1), takže po přechodu k prvním diferencím jsou již stacionární. Někdy se může stát, že lineární kombinace těchto dvou nestacionárních proměnných je stacionární, tedy *I*(0). Pak tyto proměnné nazýváme **kointegrované** a znamená to, že mezi nimi existuje dlouhodobý vztah. Uvažujme například model $Y_t = \beta X_t + u_t$. Pokud je lineární kombinace obou proměnnch $u_t = Y_t - \beta X_t$ stacionární, pak jde o kointegrované proměnné a $u_t$ lze považovat za odchylky od dlouhodobé rovnováhy. Parametr $\beta$ se pak nazývá kointegračním parametrem. Nejjednodušší je tento parametr odhadnout pomocí MNČ, čímž získáme konzistentní odhady kointegrační regrese. Pokud lineární kombinace proměnných není stacionární, pak se od sebe tyto proměnné v čase odklánějí a riskujeme zdánlivou regresi.

Pokud máme pouze dvě proměnné, může existovat jen jeden kointegrační vektor. Máme-li však *m* proměnných, může existovat až *m* – 1 kointegračních vektorů. Kointegrace nemusí být nutně řádu 1. Obecně píšeme, že proměnné jsou integrované řádu (*d, c*), pokud jsou obě integrované řádu *d* a jejich lineární kombinace je integrovaná řádu *d* – *c*.

Kointegraci můžeme testovat testy jednotkového kořene. Odhadneme kointegrační regresi specifikovanou například některým z následujících způsobů:

$$Y_t = \beta_2 X_t + v_t$$
$$Y_t = \beta_1 + \beta_2 X_t + v_t$$
$$Y_t = \beta_1 + \beta_2 X_t + \delta t + v_t$$

Uložíme si rezidua a aplikujeme **Engel-Grangerův test kointegrace** založený na DF testu.

$$\Delta \hat{v}_t = (\alpha - 1)\, \hat{v}_{t-1} + e_t$$

resp. $\Delta \hat{v}_t = (\alpha - 1)\, \hat{v}_{t-1} + \sum_{j=1}^{r} \varphi_j \Delta \hat{v}_{t-j} + u_t$ při autokorelaci náhodných složek

Nulovou hypotézou je, že $v_t$ obsahuje jednotkový kořen ($\alpha = 1$), tedy že je nestacionární a mezi původními proměnnými není kointegrační vztah. Testovou statistku musíme porovnat se speciálními Engel-Grangerovými tabulkami kritických hodnot. Pokud **zamítneme nulovou hypotézu, znamená to, že proměnné jsou kointegrované** a původní regresi lze považovat za reálně platný odhad dlouhodobého vztahu mezi nimi.

## KONSTRUKCE MODELŮ VAR

1. První krokem je **transformace dat na stacionární časové řady**, je-li to potřeba. Tedy jsou-li řady integrované řádu 0, je to v pořádku. Znamená to, že efekt šoku by postupně odezněl. Jsou-li ale řady nestacionární, tedy obsahují-li jednotkový kořen, pak model není stabilní, protože šoky neodeznívají, naopak se kumulují. Časovou řadu můžeme v některých případech stacionarizovat přechodem k prvním diferencím.

   Také je třeba vzít v úvahu možnou kointegraci proměnných. Uvažujme případ dvou proměnných integrovaných řádu 1. Odhadneme matici parametrů a najdeme charakteristické kořeny této matice. Pak platí, že:
   - jsou-li oba kořeny proměnných rovny 1, pak nejsou tyto proměnné kointegrované
   - je-li **jeden kořen roven 1**, pak jsou tyto proměnné **kointegrované** a nezahrnutí kointegračního vztahu by byla **specifikační chyba**
   - pokud není ani jeden z kořenů roven 1, pak jsou časové řady obou proměnných stacionární

   Hledání charakteristických kořenů je hezky vysvětleno tady:
   http://home.zcu.cz/~lavicka/subjects/G1/texty/pomoctext_eigen.pdf

   K testování kointegrace používáme DF test podobně jako v jednorozměrném případě. Pak pro každý charakteristický kořen najdeme odpovídající charakteristický vektor a vytvoříme matici **R**, jejíž sloupce budou tvořit právě jednotlivé charakteristické vektory. Najdeme inverzní matici $\mathbf{R}^{-1}$. Řádky matice $\mathbf{R}^{-1}$, které odpovídají nejednotkovým kořenům, obsahují parametry stacionární kointegrační regrese.

2. Druhým krokem je **volba proměnných a délky zpoždění**. Vhodnou délku zpoždění hledáme pomocí informačních kritérií (Akaike, Schwarz, Hanna-Quinn), které pracují s logaritmem determinantu odhadnuté kovarianční matice reziduí. Tato kritéria se snažíme minimalizovat. Pokud zvolíme zpoždění příliš dlouhé, klesá počet stupňů volnosti a musíme odhadovat velké množství parametrů, konkrétně $m(1 + mp)$. Příliš krátké zpoždění však zase snižuje predikční schopnosti modelu.

3. Třetím krokem může být **zjednodušení modelu** redukcí zpoždění nebo restrikcí parametrů. Cílem restrikce parametrů je snížit počet odhadovaných parametrů, aniž by se přitom muselo snižovat zpoždění.

4. Čtvrtým krokem je **ortogonalizace náhodných složek** (resp. reziduí), čili zajištění požadavku, aby kovarianční matice náhodných složek byla skalární, tedy aby vektory $v_t$ a $v_s$ v každé z rovnic byly sériově nezávislé. Pak je možné model konzistentně odhadnout MNČ a použít model k prognózování.

## ODHADY PARAMETRŮ VAR

Při splnění výše uvedených požadavků jsou odhadové funkce metodou MNČ **konzistentní**, **asymptoticky normálně rozdělené**. Jde v podstatě o soustavu zdánlivě nezávislých lineárních rovnic s identickými vysvětlujícími proměnnými. Odhady jsou vychýlené, protože model obsahuje stochastické vysvětlující proměnné, které jsou však nezávislé na náhodných složkách příslušné rovnice neomezeného redukovaného tvaru.

## POUŽITÍ MODELŮ VAR

1. Makroekonomické předpovědi
2. Analýza hospodářské politiky
3. Testování Grangerovy kauzality (vztahů mezi proměnnými)
4. Analýza funkcí odezvy

## TESTOVÁNÍ GRANGEROVY KAUZALITY

Grangerova kauzalita znamená, že v modelu je jedna nebo více proměnných, které hrají významnou roli při určení ostatních proměnných. Nezkoumáme však příčinnou závislost, zajímá nás pouze to, zda **změny jedné proměnné předcházejí změně jiné proměnné**. Například můžeme zkoumat, jestli změny nabídky peněz *MS* předchází změně *HDP*. Pokud tomu tak je, pak proměnná *MS* v modelu zpřesňuje předpověď proměnné *HDP*, ale proměnná *HDP* nezlepšuje přesnost předpovědi peněžní nabídky.

Postupujeme následujícím způsobem: sestavíme dvě regrese, omezenou a neomezenou, kde $p$ je délka zpoždění:
Neomezená regrese: $HDP_t = \sum_{i=1}^{p} \propto_i HDP_{t-i} + \sum_{i=1}^{p} \beta_i MS_{t-i} + u_t$
Omezená regrese: $HDP_t = \sum_{r=1}^{p} \propto_i HDP_{t-i} + u_t$
V neomezené regresi vysvětlujeme *HDP* i proměnnou *MS*. Nulová hypotéza je, že všechny parametry $\beta_i$ v neomezené regresi se rovnají nule, tedy že **MS nepodmiňuje HDP**. K tomu se používá *F*-test, kde testová statistika má tvar: $F = \frac{(e'e)_0-(e'e)_N}{q\cdot(e'e)_N}(T-m)$. V závorce jsou součty čtverců reziduí z omezené, resp. neomezené regrese, $T$ je počet pozorování, $m$ je počet parametrů v neomezené regresi a $q$ je počet omezení parametrů. Testovou statistiku porovnáme s hodnotou $F(q, T-m)$ stupni volnosti.

Následně uděláme totéž, ale přehodíme *MS* a *HDP*, takže zjišťujeme, jestli *HDP* podmiňuje proměnnou *MS*. Pokud **zamítneme** $H_0$, **že *MS* nepodmiňuje *HDP***, a zároveň nezamítneme $H_0$, **že *HDP* nepodmiňuje *MS***, pak to znamená, že ***MS* může zlepšit přesnost předpovědi *HDP***. Neznamená to však, že změny *MS* jsou příčinou změn *HDP*! Totéž uděláme pro různou délku zpoždění.

## ANALÝZA FUNKCÍ ODEZVY

Uvažujme VAR model ve tvaru:
$\boldsymbol{Z}_t = \boldsymbol{A}_1\boldsymbol{Z}_{t-1} + \boldsymbol{u}_t$, kde $\boldsymbol{Z}_t = \begin{pmatrix} X_t \\ Y_t \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{A}_1 = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{u}_t = \begin{pmatrix} u_{1t} \\ u_{2t} \end{pmatrix}$
Tento model lze přepsat s využitím **VMA reprezentace** (vektorové klouzavé průměry): $\boldsymbol{Z}_t = \sum_{i=0}^{\infty} \boldsymbol{A}_1^i \boldsymbol{u}_{t-i}$
Jak se k tomu došlo? Vyjádříme $\boldsymbol{Z}_t$ pomocí $\boldsymbol{Z}_{t-2}$: $\boldsymbol{Z}_t = \boldsymbol{A}_1(\boldsymbol{A}_1\boldsymbol{Z}_{t-2} + \boldsymbol{u}_{t-1}) + \boldsymbol{u}_t = \mathbf{A}_1^2\boldsymbol{Z}_{t-2} + \mathbf{A}_1\boldsymbol{u}_{t-1} + \boldsymbol{u}_t$
Když ho postupně vyjadřujeme pomocí $\boldsymbol{Z}_{t-3}$… až po $\boldsymbol{Z}_{t-n}$, dostaneme: $\boldsymbol{Z}_t = \sum_{i=0}^{n} \boldsymbol{A}_1^i \boldsymbol{u}_{t-i} + \boldsymbol{A}_1^{n+1} \boldsymbol{Z}_{t-i+1}$
Pokud je systém stabilní ( $\lim_{n\to\infty} \boldsymbol{A}_1^n \to 0$ ), pak můžeme psát pouze $\boldsymbol{Z}_t = \sum_{i=0}^{\infty} \boldsymbol{A}_1^i \boldsymbol{u}_{t-i}$.
$\boldsymbol{Z}_t$ je tedy dáno váženým součtem náhodných chyb, přitom „starší" rezidua mají menší váhu. Maticově to můžeme zapsat jako

$$\begin{pmatrix} X_t \\ Y_t \end{pmatrix} = \sum_{i=0}^{\infty} \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{pmatrix}^i \begin{pmatrix} u_{1,t-i} \\ u_{2,t-i} \end{pmatrix}$$

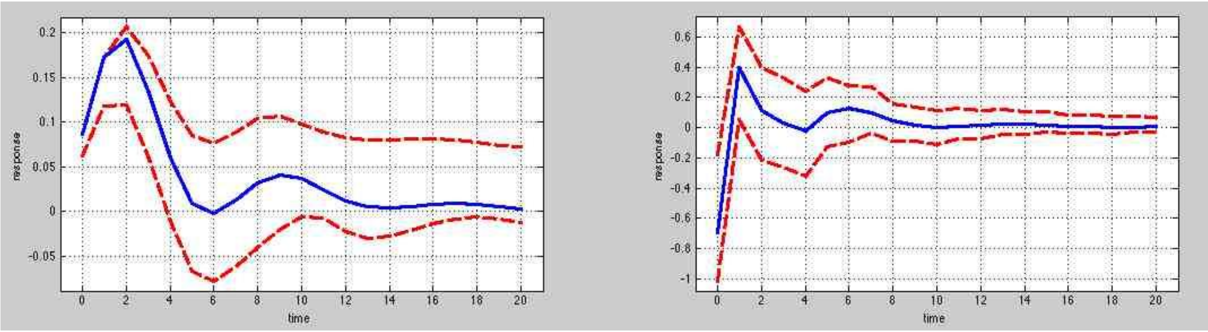
Před samotnou analýzou funkcí odezvy je ale vhodné přikročit k **ortgonalizaci**. Náhodné složky totiž bývají vzájemně zkorelované a zanedbání kovariance mezi nimi při analýze dopadů šoků na jednotlivé proměnné by bylo systematickou chybou. Pokud máme model v ortogonalizované podobě, znamená to, že **náhodné složky nejsou zatíženy korelací**.

Model v ortogonalizované podobě zapisujeme takto:

$$\begin{pmatrix} X_t \\ Y_t \end{pmatrix} = \sum_{i=0}^{\infty} \begin{pmatrix} \phi_{11}^{(i)} & \phi_{21}^{(i)} \\ \phi_{12}^{(i)} & \phi_{22}^{(i)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_{1,t-i} \\ u^*{}_{2,t-i} \end{pmatrix}$$

kde $u^*{}_{2,t} = u_{2,t} - \frac{\sigma_{12}}{\sigma_{11}} u_{1,t}$. Prvek $\phi_{jk}^{(i)}$ nám říká, jaká je reakce *j*-té proměnné na impuls *k*-té proměnné v čase *i.* Například prvek $\phi_{21}^{(0)}$ měří okamžitý dopad jednotkového šoku v $u_{1t}$ na proměnnou $Y_t$. Prvek $\phi_{21}^{(1)}$ měří dopad jednotkového šoku v $u_{1t}$ na proměnnou $Y_t$ zpožděný o jedno období.

Funkce odezvy se obvykle prezentují graficky. Vypadají třeba nějak takto:




Zdroj: http://jaac.wz.cz/diplomka/var.php

VAR model ve tvaru klouzavých průměrů umožňuje i dekompozici rozptylu vektoru chyb předpovědí.

## PROBLÉMY VAR MODELŮ

1. Modely VAR jsou ateoretické. Nejsou tak vhodné k analýze a volbě nástrojů monetární politiky.
2. Problémem mohou být zdánlivé vztahy, nejednoznačná interpretace parametrů. Stejně tak funkce odezvy a dekompozici rozptylu nelze obvykle přesně interpretovat.
3. Testy kauzality nám nepoví, jak dlouho trvá vliv jednotlivých šoků.
4. Pro malé výběry jsou přeparametrizované (máme málo pozorování a zároveň dost parametrů).

## PŘEDPOVĚDI POMOCÍ VAR MODELŮ

Předpovědi pomocí VAR modelů děláme jednoduše **extrapolací**. Jde tedy o **podmíněné očekávání $\mathbf{y}_{t+h}$ na konci období t**. Například, pokud vynecháme pro zjednodušení úrovňovou konstantu a uvažujeme VAR(1) model, získáme optimální předpověď $\mathbf{y}_{t+1}$, tedy **předpověď s minimální střední kvadratickou chybou**, jako: $\hat{\boldsymbol{y}}_{t+1|t} = \mathrm{E}(\boldsymbol{y}_{t+1}|\boldsymbol{y}_t, \boldsymbol{y}_{t-1\ldots}) = \Pi_1 y_t.$

Pro $\mathbf{y}_{t+2}$ by to bylo $\hat{\boldsymbol{y}}_{t+2|t} = \mathrm{E}(\boldsymbol{y}_{t+2}|\boldsymbol{y}_t, \boldsymbol{y}_{t-1\ldots}) = \Pi_1 \mathbf{y}_{t+1} = \Pi_1^2 \mathbf{y}_t.$

A tak dále. až pro $\mathbf{y}_{t+h}$ bychom dostali $\hat{\boldsymbol{y}}_{t+h|t} = \mathrm{E}(\boldsymbol{y}_{t+h}|\boldsymbol{y}_t, \boldsymbol{y}_{t-1\ldots}) = \mathbf{\Pi}_1^{h} \mathbf{y}_t.$

**Vektor chyb předpovědí** vyjádříme jako $\mathbf{e}_h = \boldsymbol{y}_{t+h} - \hat{\boldsymbol{y}}_{t+h|t} = \boldsymbol{v}_{t+h} + \Pi_1 \boldsymbol{v}_{t+h-1} + \cdots + \Pi_1^{h-1} \boldsymbol{v}_{t+1}$
**Kovarianční matice** chyb předpovědí má tvar $\Sigma(h) = \Omega + \Pi_1 \Omega \Pi_1' + \Pi_1^2 \Omega (\Pi_1')^2 + \ldots \Pi_1^{h-1} \Omega (\Pi_1')^{h-1}$,
kde kovarianční matice $\mathrm{E}(\mathbf{v}_t, \mathbf{v}_h') = \mathbf{\Omega}$ pro a $\mathbf{0}$ pro $h \neq t$ je pozitivně definitní.
Obecně VAR modely dávají horší předpovědi než řada jiných technik.

## ZDROJE

Hušek, R: Ekonometrická analýza. Nakladatelství Oeconomica, Praha 2007.
Nonstationarity and cointegration. University of Queensland, ECON2300, 2012.
Formánek, T.: VAR, 2014. Dostupné z https://sites.google.com/site/ekonometrievse/4ek416/tyden-07