NEOKLASICKÁ PRODUKČNÍ FUNKCE. CHARAKTER VÝNOSŮ Z ROZSAHU.

Produkční funkce v neoklasickém pojetí představuje **vztah mezi maximálním možným výstupem a alternativními kombinacemi vstupů**. Cílem je tedy maximalizovat zisk při daných cenách a technologii. Zároveň umožňuje analyzovat i vztahy mezi vstupy navzájem. Pro dva výrobní faktory, práci a kapitál, lze vztah mezi maximálním objemem produkce Y a vstupy napsat jako max $Y = f(K,L)$. Předpokládá se, že existují její spojité první a druhé parciální derivace podle K, respektive L, přičemž má platit, že

$\frac{\partial Y}{\partial K} > 0, resp. \frac{\partial Y}{\partial L} > 0$, tedy mezní produktivity výrobních faktorů jsou kladné (s růstem objemu jednoho výrobního faktoru roste i objem produkce)

$\frac{\partial^2 Y}{\partial K^2} < 0, resp. \frac{\partial^2 Y}{\partial L^2} < 0$, tedy křivka produkce je konkávní vzhledem k počátku souřadnic K, L

ZÁKLADNÍ CHARAKTERISTIKY A VÝNOSY Z ROSZAHU

Cílem naší analýzy může být:

1) určení efektivnosti jednotky některého výrobního faktoru, pokud objem ostatních zůstane nezměněn = **mezní produkt výrobního faktoru.** Mezní produktivita výrobních faktorů bývá většinou klesající.

2) určení vzájemné zaměnitelnosti výrobních faktorů = **mezní míra substituce**

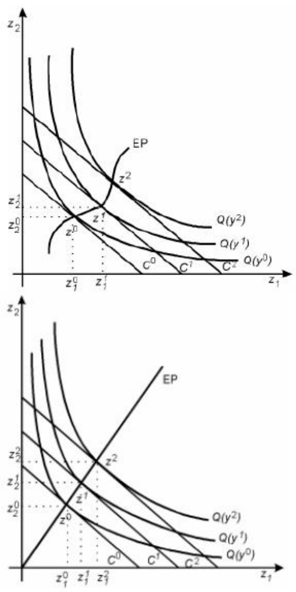
3) určení charakteru **výnosů z rozsahu**:

   Zjišťujeme **stupeň homogenity** produkční funkce[1], a to tak, že zkoumáme, čemu se rovná r ve vztahu $f(\lambda K,\lambda L) = \lambda^r (K,L)$, kde $\lambda > 0$. Pokud se při každém zvýšení výrobních faktorů λ-*krát* ve stejné proporci zvýší výstup λ^r-*krát*, jde o homogenní produkční funkci, kde r určuje stupeň homogenity. Přitom může dojít

   i. k proporcionálnímu růstu výstupu ($r = 1$) v případě konstantních výnosů z rozsahu (tomu se říká homogenita prvního stupně, lineární homogenita),
   ii. k více než proporcionálnímu růstu výstupu ($r > 1$) v případě rostoucích výnosů z rozsahu
   iii. k nižšímu než proporcionálnímu růstu výstupu ($r < 1$) v případě klesajících výnosů z rozsahu.

[1] Obecně ale produkční funkce nemusí být nutně homogenní → lze tedy měřit lokální výnosy z rozsahu pomocí pružnosti produkce v určitém bodu K, L. Pružnost produkce vzhledem k ekviproporcionálnímu růstu vstupů určíme vztahem $(K/Y)(dY/dK) + (L/Y)(dY/dL)$, kde $(dK/K) = (dL/L)$.

Sklon izokvant homogenní produkční funkce závisí jen na poměru vstupů, nikoli na rozsahu výroby. Homogenní funkce je zvláštním případem tzv. **homotetické funkce**. Pro homotetickou produkční funkci platí: $Y = F[g(K,P)]$. To znamená, že výnosy z rozsahu nezávisí na proporci práce a kapitálu, nýbrž jen na velikosti produkce. Homogenní funkce je vždy homotetická, ale ne každá homotetická funkce je homogenní. Graficky jde o **soustavu křivek stejného zakřivení** (sklonu). Pokud spojíme optimální kombinace práce a kapitálu pro jednotlivé úrovně produkce, dostaneme tzv. expanzní dráhu. V případě homotetické produkční funkce by měla vypadat jako na spodním obrázku (tedy šlo by o paprsek vedoucí z počátku).



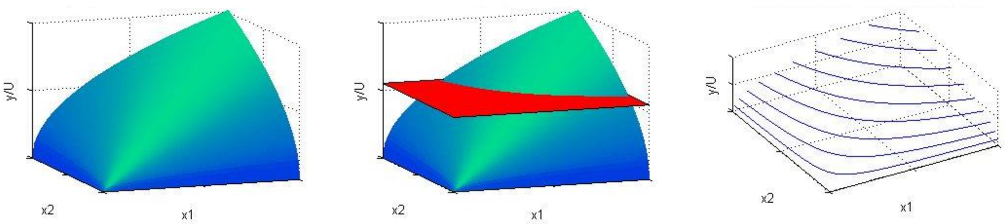
ZDROJ: IES UK

4) nalezení **optimální kombinace** výrobních faktorů zaručující maximální zisk

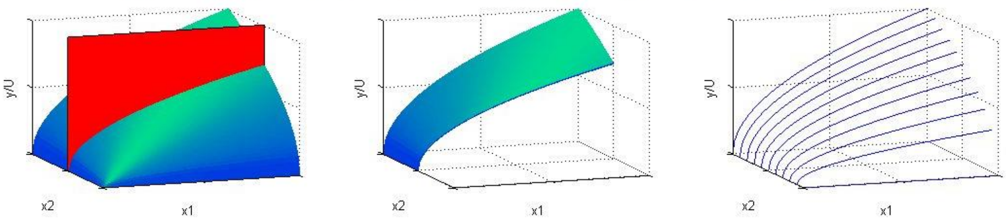
5) případně určení **vlivu technologického pokroku** u dynamické produkční funkce.

Je potřeba neplést **mezní produktivitu** (týká se změny jednoho výrobního faktoru při konstantním množství druhého) a **výnosy z rozsahu** (týká se proporcionální změny všech výrobních faktorů). I přes to, že se u většiny výrobních faktorů prosazuje zákon klesajících mezních výnosů, může vykazovat produkční funkce rostoucí či konstantní výnosy z rozsahu.

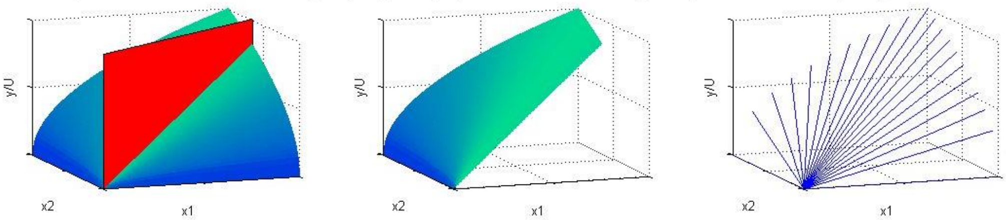
Produkční funkce s konstantními výnosy z rozsahu



U jednotlivých výrobních faktorů se prosazuje zákon klesajících výnosů.



Při zvýšení obou faktorů ve stejné proporci je patrné, že funkce vykazuje konstantní výnosy z rozsahu.



Zdroj: http://www2.hawaii.edu/~fuleky/anatomy/anatomy.html

STATICKÁ COBB-DOUGLASOVA PRODUKČNÍ FUNKCE

Statickou neoklasickou dvoufaktorovou Cobb-Douglasovu produkční funkci lze vyjádřit jako

$$Y = aK^{\alpha}L^{\beta}$$

kde *Y* je objem produkce, *K* a *L* jsou práce a kapitál a zbytek jsou parametry, které musíme odhadnout. Pro průřezová data v případě relativně stejnorodých firem lze za účelem odhadu parametrů vyjádřit výše uvedený deterministický vztah jako:

$$Y_i = aK_i{}^{\alpha}L_i{}^{\beta}u_i,$$

kde předpokládáme, že rozdíly mezi parametry napříč firmami jsou součástí náhodné složky, která se do modelu zahrnuje v multiplikativní podobě. První parciální derivace produkce podle výrobního faktoru je kladná: s růstem objemu jednoho výrobního faktoru totiž objem produkce roste.

Druhá parciální derivace produkce podle výrobního faktoru je záporná: křivka produkce je totiž konkávní, příčinou je klesající mezní produktivita výrobních faktorů.

Model je nelineární v parametrech a převádí se do podoby

$$lnY_i = lna + \alpha lnK_i + \beta lnL_i + lnu_i.$$

Předpokládá se, že *lnu* má průměr roven nule, tedy *u* má průměr roven 1. Protože *lnu* > 0, tak je objem produkce vždy kladný.

Pro **mezní produktivitu kapitálu**, resp. práce platí

$$MP_K = f_{Ki} = \alpha(Y_i/K_i),$$

$$MP_L = f_{Li} = \beta(Y_i/L_i),$$

nezávisí tak na náhodné složce (kdyby byla funkce ve tvaru $Y_i = aK_i{}^{\alpha}L_i{}^{\beta} + u_i$, toto by neplatilo, a nešlo by ji odhadnout MNČ, bylo by potřeba použít například metodu maximální věrohodnosti). Parametry α a β tedy představují koeficienty pružnosti produkce vzhledem ke kapitálu, resp. práci (jde o relativní pružnosti, interpretují se v procentech). Mezní produktivita práce a kapitálu je pak absolutní pružnost a musíme k jejímu určení znát konkrétní data za určité období.

Druhé parciální derivace mají tvar:

$$f^2_{Ki} = \alpha(\alpha - 1)(Y_i/K_i^2) \text{ a } f^2_{Li} = \beta(\beta - 1)(Y_i/L_i^2)$$

Aby byly záporné, jak mají být, tak je zřejmé, že parametry α a β musí být v intervalu (0, 1).

Hodnota parametru *a* závisí jednak na měrných jednotkách, jednak je určena efektivností modelovaného výrobního procesu.

Cobb-Douglasova produkční funkce je homogenní a homotetická. Stupeň její homogenity je dán součtem parametrů $\alpha + \beta$. Tím určíme i **výnosy z rozsahu**. Když se jak práce, tak kapitál zvýší *k*-krát, pak může nastat jedna ze tří situací:

1) $\alpha + \beta > 1$ → Y se zvýší více než *k*-krát = rostoucí výnosy z rozsahu;
2) $\alpha + \beta = 1$ → Y se zvýší *k*-krát = konstantní výnosy z rozsahu;
3) $\alpha + \beta < 1$ → Y se zvýší méně než *k*-krát = klesající výnosy z rozsahu.

Množinu izokvant, které odpovídají různým objemům produkce, lze zachytit soustavou křivek stejného sklonu, které jsou konvexní vzhledem k počátku soustavy souřadnic. Sklon izokvanty pro určitý objem produkce určíme pomocí mezní míry substituce. **Mezní míra substituce** práce kapitálem nám říká, v jakém poměru lze při určitém množství práce a kapitálu nahrazovat práci kapitálem při neměnné úrovni výstupu. Je definována vztahem:

$$MMS_{KL} = (\alpha/\beta)\cdot(L/K)$$

Pružnost substituce σ Cobb-Douglasovy produkční funkce je rovna **1** (tedy např. při růstu podílu L/K o 1 % se zvýší i MMS o 1 %).

Lze spočítat **faktorovou intenzitu** pro různé procesy. Jde o sklon přímky vycházející z počátku soustavy souřadnic. Například můžeme vyrobit 10 ks výrobku s K = 5 a L = 2, nebo K = 4 a L = 3. Pak pro první proces platí K/L = 5/2 = 2,5, pro druhý proces K/L = 4/3. Druhý proces je tak méně kapitálově intenzivní než první. V případ lineární homogenní Cobb-Douglasovy produkční funkce udává průměrnou faktorovou intenzitu podíl parametrů α a β.

Cobb-Douglasovu produkční funkci můžeme odhadnout nelineární metodou nejmenších čtverců, nebo po logaritmické transformaci i metodou nejmenších čtverců.

A co když chceme maximalizovat zisk? Víme, že v optimu platí, že mezní produkty jednotlivých výrobních faktorů musí být rovny jejich reálným cenám (podmínky prvního řádu pro maximalizaci zisku):

$$MPK = \frac{\partial Y}{\partial K} = \boldsymbol{\alpha}\frac{\boldsymbol{Y_i}}{\boldsymbol{K_i}} = \frac{\boldsymbol{m}}{\boldsymbol{p}}$$

$$MP_L = \frac{\partial Y}{\partial L} = \boldsymbol{\beta}\frac{\boldsymbol{Y_i}}{\boldsymbol{L_i}} = \frac{\boldsymbol{w}}{\boldsymbol{p}}$$

kde p je cena produkce, m a w ceny výrobních faktorů. Můžeme tomu přidat také náhodou složku a zlogaritmovat. Získáme soustavu tří simultánních rovnic (u, v, v* označují náhodné složky):

1) $lnY_i = lna + \alpha lnK_i + \beta lnL_i + lnu_i$
2) $lnY_i = -ln\alpha + ln(m/p) + lnK_i + lnv_i$
3) $lnY_i = -ln\beta + ln(w/p) + lnL_i + lnv^*_i$.

Jde o strukturní tvar interdependentního MSR, kde velikost produkce, práce a kapitál vystupují jako endogenní proměnné. Model můžeme odhadnout například metodou dvoustupňových nejmenších čtverců.

Pro shrnutí: co tedy můžeme zjistit po odhadu funkce?

1) *Pokud odhadneme pouze první rovnici, můžeme pro konkrétní pozorování spočítat **mezní produkt kapitálu** jako $MP_K = \alpha(Y/K)$ a **mezní produkt práce** jako $MP_K = \beta(Y/K)$. Také můžeme zjistit **optimální množství jednoho faktoru při daných cenách a dané úrovni druhého faktoru**. V optimu platí, že mezní produktivita výrobního faktoru se rovná jeho reálné ceně, např. $(\delta Y/\delta K) = m/p$. Výraz $(\delta Y/\delta K)$ vyjádříme z rovnice $Y = aK^{\alpha}L^{\beta}$ jako $\delta Y/\delta K = a\alpha K^{\alpha-1}L^{\beta}$. To dosadíme do vztahu $(\delta Y/\delta K) = m/p$ a dostaneme: $pa\alpha K^{\alpha-1}L^{\beta}= m$. Z toho dopočteme optimální objem kapitálu při daných cenách a úrovni práce.*

2) *Podíly mezních produktivit a cen výrobních faktorů jsou v optimu stejné. Lze tudíž zjistit **optimální poměr obou vstupů při daných cenách pro jakýkoli objem produkce**, a to jako $MP_K / MP_L = [\alpha(Y/K)]/[\beta(Y/L)]= m/w$, po úpravě $K = (w\alpha/m\beta)L$. Průsečíky izokvant a nákladových křivek (izokost) znázorňuje křivka expanze.*

3) *Můžeme určit **výnosy z rozsahu** (zkoumáme, čemu se rovná $\alpha + \beta$).*

4) *Můžeme pro konkrétní pozorování spočítat **mezní míru substituce**, např. mezní míra substituce práce kapitálem se pro danou úroveň práce a kapitálu spočítá jako $(\alpha/\beta)\cdot(L/K)$.*

5) *Nebo můžeme nalézt simultánní řešení všech tří rovnic, a najít tak **hodnoty výrobních faktorů a produkce, které zajistí maximální zisk**.*

6) *Vliv technologického pokroku v takto specifikované PF zkoumat nemůžeme. Potřebujeme dynamickou spotřební funkci.*

Existuje řada modifikací Cobb-Douglasovy produkční funkce, například:

- **transcendentní produkční funkce**: $Ye^{cY} = aK^{\alpha}L^{\beta}$, jejíž mezní produktivita může nejprve růst, pak klesat, a jejíž pružnost substituce je variabilní;
- **translog produkční funkce** $lnY_i= lna + \alpha lnK_i+ \beta lnL_i + \gamma lnKlnP + \delta(lnK)^2 + \varepsilon(lnP)^2$, jejíž pružnost substituce je variabilní a dá se použít (na základě Taylorova rozvoje druhého řádu) jako dobrá aproximace jiných PF s variabilní pružností substituce;
- **produkční funkce s konstantní pružností substituce**: $Y= c[\gamma K^{-\rho} + (1 - \gamma)L^{-\rho}]^{-r/\rho}e^{u}$,
kde *c* je parametr efektivnosti výrobního procesu, *γ* je tzv. distribuční parametr (závisí na jednotkách vstupů), *r* je stupeň homogenity a *ρ* je parametr substituce. Jde o homotetickou funkci. Na rozdíl od klasické Cobb-Douglasovy produkční funkce ale nemusí být pružnost substituce výrobních faktorů jednotková, byť je také konstantní.[2]

[2] Pro podrobnosti viz Hušek Aplikovaná ekonometrie kapitola 2.2.4

DYNAMICKÁ COBB-DOUGLASOVA PRODUKČNÍ FUNKCE

Dynamickou neoklasickou dvoufaktorovou Cobb-Douglasovu produkční funkci lze vyjádřit jako

$$Y = ae^{gt} K^{\alpha} L^{\beta} u_t$$

Měříme vliv nezpředmětněného technického pokroku pomocí proměnné čas. Parametr *g* měří relativní změnu objemu produkce vyvolanou nezpředmětněným technickým pokrokem v průměru za jedno období při neměnném množství výrobních faktorů, resp. nezávisle na jejich změně. Nezpředmětněný technologický pokrok může být třeba lepší organizační struktura společnosti apod.

Po zlogaritmování dostaneme model: $lnY_i = lna + gt + \alpha lnK_i + \beta ln_i + lnu_i$.

Model lze opět odhadnout MNČ (po zlogatitmování) nebo NMNČ (v původní verzi).

Problémem bývá

- silná kolinearita řad *K* a *L;*
- fakt, že *g* je v takto specifikovaném modelu konstantní (neměnný);
- nerealistický předpoklad, že technický pokrok je **neutrální**, tedy že neovlivňuje mezní míru substituce výrobních faktorů (nemění pracovní či kapitálovou náročnost procesu, tedy podíl α/β by měl být konstantní);
- potenciální riziko nestacionarity časových řad *K* a *L*, otázka kointegrace, problém zdánlivé regrese.

V případě předpokladu lineární homogenity lze specifikovat model jako: $Y = ae^{gt} K^{\alpha^*} L^{1-\alpha^*} u_t$ → odhadneme model $Y/L = ae^{gt} (K/L)^{\alpha^*} u_t$ a vyhneme se kolinearitě. Parametr α^* zahrnuje i měnící se kapitálovou náročnost technického pokroku. Pro $\alpha^* > 0$ jde o kapitálově úsporný technický pokrok, pro $\alpha^* < 0$ naopak kapitálově náročný.

PŘÍKLAD: ANALÝZA PRODUKČNÍ FUNKCE

Máme informace o objemu produkce v závislosti na použitém objemu práce a kapitálu. Odhadneme dynamickou Cobb-Douglasovu produkční funkci $Y = ae^{gt} K^{\alpha} L^{\beta} u_t$. Nejprve ji zlogaritmujeme a odhadujeme tvar $lnY_i = lna + gt + \alpha lnK_i + \beta ln_i + lnu_i$. Výstup je následující:

```
> summary(regrese.dynamic)

Call:
lm(formula = log(Y) ~ log(K) + log(L) + t)

Residuals:
     Min       1Q   Median       3Q      Max 
-0.52214 -0.14297  0.00654  0.11511  0.52898 

Coefficients:
             Estimate Std. Error t value Pr(>|t|)    
(Intercept) 0.1822506  0.4674732   0.390  0.69750    
log(K)      0.6073219  0.1068720   5.683 1.42e-07 ***
log(L)      0.3410466  0.1064851   3.203  0.00185 ** 
t           0.0504999  0.0007286  69.315  < 2e-16 ***
---
Signif. codes:  0 '***' 0.001 '**' 0.01 '*' 0.05 '.' 0.1 ' ' 1

Residual standard error: 0.2075 on 96 degrees of freedom
Multiple R-squared: 0.9811,	Adjusted R-squared: 0.9805 
F-statistic:  1661 on 3 and 96 DF,  p-value: < 2.2e-16
```

1. Zapiš odhadnutou funkci ve tvaru logaritmů: $ln(Y_t) = \_\_\_ + \_\_\_ ln(K) + \_\_\_ ln(L) + \_\_\_ t + u_t$
2. Zapiš model ve tvaru $Y = ae^{gt} K^{\alpha} L^{\beta} u_t$ (asi budeš potřebovat kalkulačku, jestli ji nemáš, třeba ti pomůže výstup níže): $Y_t = \_\_\_ K^{\_\_} L^{\_\_} e^{\_\_ t} e^{u_t}$

```
> #koeficienty regrese ve tvaru logaritmu
> regrese.dynamic$coef
(Intercept)      log(K)      log(L)           t 
 0.18225062  0.60732186  0.34104665  0.05049986 
> #e umocneno na koeficienty regrese ve tvaru logaritmu
> exp(regrese.dynamic$coef)
(Intercept)      log(K)      log(L)           t 
   1.199915    1.835509    1.406419    1.051797 
```

3. Pokud se ceteris paribus množství kapitálu zvedne o 1 %, zvýší se výstup v průměru o ___ %.
4. Pokud se ceteris paribus množství práce zvedne o 1 %, zvýší se výstup v průměru o ___ %.
5. Při neměnném objemu výrobních faktorů se vlivem technického pokroku zvýší za jedno období výstup o ___ %.
6. V prvním období byl kapitál roven 16,2 a práce 33,1 jednotek. Vyrobili jsme 25 jednotek výstupu. Mezní míra substituce práce kapitálem byla tudíž rovna __________. Kdybychom zvýšili kapitál o jednotku, sníží se *L* o ____ jednotek při neměnné úrovni výstupu.
7. Mezní produkt kapitálu v prvním období byl roven ______. Takže kdyby se v tomto období při neměnném množství práce navýšil kapitál o jednotku, produkt naroste o ______ jednotek.
8. Mezní produkt práce v prvním období byl roven _____. Takže kdyby se v tomto období při neměnném množství kapitálu navýšila práce o jednotku, produkt naroste o ______ jednotek.
9. Tato dynamická produkční funkce vykazuje klesající / rostoucí / konstantní výnosy z rozsahu. Kdyby se oba vstupy zvýšily 2krát, zvýší se výstup ____ krát.

ODPOVĚDI

1. *Zapiš odhadnutou funkci ve tvaru logaritmů:* $ln(Y_t) = 0{,}18 + 0{,}61ln(K) + 0{,}34ln(L) + 0{,}06t + u_t$
2. *Zapiš model ve tvaru* $Y = ae^{gt} K^{\alpha} L^{\beta} u_t$: $Y_t = 1{,}2K^{0{,}61}L^{0{,}34}e^{0{,}06t}e^{ut}$
3. *Pokud se ceteris paribus množství kapitálu zvedne o 1 %, zvýší se výstup v průměru o 0,61 %.*
4. *Pokud se ceteris paribus množství práce zvedne o 1 %, zvýší se výstup v průměru o 0,34 %.*
5. *Při neměnném objemu výrobních faktorů se vlivem technického pokroku zvýší za jedno období výstup v průměru přibližně o 6 %.*
6. *V prvním období byl kapitál roven 16,2 a práce 33,1 jednotek. Vyrobili jsme 25 jednotek výstupu. Mezní míra substituce práce kapitálem byla tudíž rovna 3,67. Kdybychom zvýšili kapitál o jednotku, lze snížit práci o 3,67 jednotek při neměnné úrovni výstupu.*
7. *Mezní produkt kapitálu v prvním období byl roven 0,46. Takže kdyby se v tomto období při neměnném množství práce navýšil kapitál o jednotku, produkt naroste o 0,46 jednotek.*
8. *Mezní produkt práce v prvním období byl roven 0,26. Takže kdyby se v tomto období při neměnném množství kapitálu navýšila práce o jednotku, produkt naroste o 0,26 jednotek.*
9. *Tato dynamická produkční funkce vykazuje (téměř) konstantní výnosy z rozsahu. Kdyby se oba vstupy zvýšily 2krát, zvýší se výstup* $\lambda^{0{,}95} = 1{,}93$*krát.*

ZDROJE

Hušek, R.: Aplikovaná ekonometrie. Nakladatelství Oeconomica, Praha 2009.

Krkošková, Š., Ráčková, A., Zouhar, J.: Základy ekonometrie v příkladech. Nakladatelství Oeconomica, Praha 2010.