

OPTIMÁLNÍ ŘÍZENÍ V EKONOMETRII. METODA CÍLOVÝCH PROMĚNNÝCH A JEJÍ OMEZENÍ.

Ekonometrické modely jsou využívány i na makroúrovni či v podnikové sféře při řešení různých rozhodovacích problémů. Lze pomocí nich totiž odhadnout vliv dopadu možných variant hospodářské či podnikové politiky a najít takové řešení, které povede co nejlépe ke stanovenému cíli při splnění všech omezujících podmínek.

Na úvod je potřeba uvést některé klíčové pojmy z hospodářské politiky. Vláda má cíle **krátkodobého charakteru**, které zajišťuje **stabilizačními opatřeními** (jde o krátkodobou hospodářskou politiku na 1 až 2 roky). Příkladem je vývoj HDP v příštím roce. Má také cíle **dlouhodobého charakteru** (3 až 10 let), které zajišťuje **strategickými rozvojovými rozhodnutími**. Může jít třeba o zajištění určité trajektorie růstu. V tomto kontextu je potřeba rozlišovat čtyři druhy proměnných.

- 1) **cílové proměnné** jsou řízené endogenní proměnné. Ty odpovídají stanoveným cílům jako například cílová výše HDP;
- 2) **ostatní endogenní proměnné** jsou proměnné, které nás až tak nezajímají (mohou ovlivňovat cílové proměnné, ale nejsou důležité z hlediska hospodářské politiky);
- 3) **řídící proměnné** jsou exogenní proměnné, které můžeme ovlivňovat, tedy nástroje hospodářské politiky (opatření fiskální, monetární, zahraničně-obchodní či sociální politiky);
- 4) **autonomní proměnné** jsou zbývající exogenní či zpožděné endogenní proměnné, které nemůžeme kontrolovat (tedy vstupní data).

Rozdělte proměnné na cílové a řídící: HDP, úroková míra jako např. repo sazba, cla, povinné minimální rezervy, agregátní spotřeba, vládní výdaje, DPH, míra nezaměstnanosti, minimální mzda, inflace, daně z příjmů, saldo obchodní bilance¹

Většinou se pracuje s **dynamickými MSR ve strukturním tvaru**.

$$\begin{aligned} \text{Strukturní tvar: } \quad \mathbf{B}\mathbf{y}_t + \mathbf{\Gamma}_1\mathbf{y}_{t-1} + \mathbf{\Gamma}_2\mathbf{x}_{t-1} + \mathbf{\Gamma}_3\mathbf{z}_t &= \mathbf{u}_t \\ \text{Redukovaný tvar:} & \quad \mathbf{y}_T = -\mathbf{B}^{-1}\mathbf{\Gamma}_1\mathbf{y}_{t-1} - \mathbf{B}^{-1}\mathbf{\Gamma}_2\mathbf{x}_{t-1} - \mathbf{B}^{-1}\mathbf{\Gamma}_3\mathbf{z}_t + \mathbf{B}^{-1}\mathbf{u}_t \\ & \quad = \mathbf{\Pi}_1\mathbf{y}_{t-1} + \mathbf{\Pi}_2\mathbf{x}_{t-1} + \mathbf{\Pi}_3\mathbf{z}_t + \mathbf{v}_t \end{aligned}$$

kde

- \mathbf{y}_t resp. \mathbf{y}_{t-1} je $G \times 1$ vektor běžných resp. zpožděných cílových endogenních proměnných
- \mathbf{x}_{t-1} je $m \times 1$ vektor zpožděných řídících proměnných (lze uvažovat i jejich běžné hodnoty)
- \mathbf{z}_t je vektor autonomních exogenních proměnných.
- $\mathbf{B}, \mathbf{\Gamma}$ jsou matice strukturních parametrů,
- $\mathbf{\Pi}_1$ je $G \times G$ matice dynamických multiplikátorů, $\mathbf{\Pi}_2$ je $G \times m$ matice dynamických multiplikátorů, $\mathbf{\Pi}_3$ je $G \times K$ matice běžných multiplikátorů,
- \mathbf{u}_t a \mathbf{v}_t jsou vektory náhodných složek.

Je možné použít několik metod: metodu cílových proměnných, princip optimálního řízení (otevřeného či pomocí zpětné vazby), simulaci či optimalizaci s využitím racionálních očekávání.

¹ Cílové: HDP, agregátní spotřeba, míra nezaměstnanosti, inflace, saldo obchodní bilance; Řídící: vše ostatní

METODA CÍLOVÝCH PROMĚNNÝCH

Tento postup navrhl Tinbergen. Vychází z předpokladu, že **známe** pro jednotlivá období fixní **požadovanou úroveň** zvolených **cílových proměnných**. Počet řídicích proměnných x bude m , počet cílových proměnných bude G . Musí platit, že $m \geq G$.

Odhadneme dynamický model simultánních rovnic. Předpokládáme přitom, že současné hodnoty cílových proměnných závisí na svých zpožděných hodnotách, na současných hodnotách autonomních proměnných a na řídicích proměnných v předchozím období. Model zapisujeme jako:

$$\widehat{\mathbf{B}}\mathbf{y}_T + \widehat{\Gamma}_1\mathbf{y}_{T-1} + \widehat{\Gamma}_2\mathbf{x}_{T-1} + \widehat{\Gamma}_3\mathbf{z}_T = \mathbf{e}_t$$

kde $\widehat{\mathbf{B}}, \widehat{\Gamma}$ značí konzistentní odhady matic strukturních parametrů, \mathbf{e}_t značí rezidua.

Řídicí proměnné chceme v současném období nastavit tak, abychom pro další období získali požadované hodnoty cílových proměnných. Vektor požadovaných hodnot cílových proměnných v období $T + 1$ si označíme \mathbf{y}^{**}_{T+1} . Dynamický MSR ve strukturním tvaru pro období $T + 1$ můžeme zapsat jako:

$$\widehat{\mathbf{B}}\mathbf{y}^{**}_{T+1} + \widehat{\Gamma}_1\mathbf{y}_T + \widehat{\Gamma}_2\mathbf{x}_T + \widehat{\Gamma}_3\widehat{\mathbf{z}}_{T+1} = \mathbf{e}_{t+1}$$

kde $\widehat{\mathbf{z}}_{T+1}$ značí vektor **odhadů** exogenních proměnných (jejich hodnoty v čase $T+1$ totiž neznáme). Z tohoto modelu už můžeme snadno **stanovit** takové **hodnoty řídicích proměnných**, abychom dosáhli požadovaných hodnot cílových proměnných. Stačí si model přepsat takto:

$$\mathbf{x}^{opt}_T = -\widehat{\Gamma}_2^{-1}\widehat{\mathbf{B}}\mathbf{y}^{**}_{T+1} - \widehat{\Gamma}_2^{-1}\widehat{\Gamma}_1\mathbf{y}_T - \widehat{\Gamma}_2^{-1}\widehat{\Gamma}_3\widehat{\mathbf{z}}_{T+1} + \widehat{\Gamma}_2^{-1}\mathbf{e}_{T+1}$$

To znamená, že **optimální hodnoty řídicích proměnných** v čase T **jsou lineární funkcí požadovaných hodnot cílových proměnných** v čase $T + 1$, **jejich zpožděných hodnot** v čase T , daných (či odhadnutých) hodnot **autonomních proměnných** v čase T a reziduí. Pokud $m = G$, existuje jedno řešení. Pokud $m > G$, existuje více řešení, ale za $m - G$ nástrojů můžeme dosadit pevné hodnoty a řešíme soustavu pro zbývajících G nástrojů. Pro $m < G$ řešení neexistuje. Můžeme pomocí odhadnutých parametrů zkoumat i citlivost hodnot řídicích proměnných na změny vysvětlujících proměnných. Například $-\widehat{\Gamma}_2^{-1}\widehat{\mathbf{B}}$ měří reakci optimálních nástrojů řízení v čase T na změny cílových proměnných v čase $T + 1$.

Příklad: mějme cílovou proměnnou národní důchod Y a řídicí proměnnou výši vládních výdajů a a investic Z .

1) *Odhadneme následující model (redukovaný tvar) z pozorování, která máme: $Y^{**}_t = \hat{\pi}_1 + \hat{\pi}_2 Y_{t-1} + \hat{\pi}_3 Z_t + v_t$*

2) *Přepíšeme model pro budoucí období: $Y^{**}_{t+1} = \hat{\pi}_1 + \hat{\pi}_2 Y_t + \hat{\pi}_3 Z_t + v_{t+1}$ přičemž zde předpokládáme, že $Z_T = Z_{T+1}$.*

3) *Protože $m = G = 1$, můžeme získat jednoznačnou odpověď na otázku, jak nastavit hodnotu proměnné Z_t , požadujeme-li, aby Y_{T+1} bylo rovno určité hodnotě, a to řešením rovnice:*

$$Z_t^0 = (Y^{**}_{T+1} - \hat{\pi}_1 - \hat{\pi}_2 Y_t - v_{t+1}) / \hat{\pi}_3 \quad \dots \text{ a je to.}$$

Pak $\hat{\pi}_3^{-1}$ představuje reakci optimální úrovně vládních výdajů a investic na jednotkovou změnu požadované cílové proměnné.

Tato metoda má řadu omezení:

- ➔ nepřipouští možnost interakce a kompenzace změn v hodnotách různých cílů (pro každý cíl musí být stanovena fixní hodnota)
- ➔ je nutno dodržet podmínku $m \geq G$
- ➔ je třeba předem určit předem hodnoty cílových proměnných

OPTIMÁLNÍ ŘÍZENÍ V EKONOMETRII

Podstatou následujících postupů je **hledání extrému kriteriální funkce při respektování omezujících podmínek**, které představuje většinou MSR model nebo VAR model. Snažíme se tedy najít takový vektor (či posloupnost vektorů) řídicích proměnných, kterými dosáhneme maxima či minima zvolené funkce. Často je funkce specifikována tak, že se **minimalizuje součet vážených absolutních hodnot odchylek** skutečných a požadovaných cílových a řídicích proměnných. Pak můžeme úlohu řešit pomocí **lineárního programování**. Většinou jde ale spíše o funkci, kde se **minimalizuje vážený součet čtverců odchylek**, anebo se **maximalizuje kvadratická preferenční funkce**. Pak je potřeba použít **nelineární** (kvadratické) či dynamické programování. Nyní se zaměříme na druhou zmíněnou, kvadratickou funkci. Co se týče omezujících podmínek, budeme vycházet z odhadnutých lineárních MSR.

OTEVŘENÉ OPTIMÁLNÍ ŘÍZENÍ

Tuto metodu rozpracoval Theil a používá se při dlouhodobé strategii otevřeného řízení. Metoda spočívá v **určení pevné trajektorie optimálních hodnot** už na počátku horizontu (nově zjištěné informace o skutečném dopadu politiky se **nevyužívají ke korekci optimálního řešení**). Většinou se však postupuje tak, že se sice určí trajektorie optimálních hodnot řídicích proměnných pro několik let, například 2014 až 2020, ale pak se použije pouze hodnota pro rok 2014, a za rok se určí s využitím nových informací (skutečného dopadu) trajektorie optimálních hodnot pro roky 2015 až 2021 atd.

Kvadratická preferenční funkce pro krátkodobou hospodářskou politiku může vypadat například takto:

$$W = E[0,5(\mathbf{y}_{T+1} - \mathbf{y}^{**}_{T+1})\bar{K}(\mathbf{y}_{T+1} - \mathbf{y}^{**}_{T+1})' + 0,5(\mathbf{x}_T - \mathbf{x}^{**}_T)\bar{Q}(\mathbf{x}_T - \mathbf{x}^{**}_T)']$$

- $\mathbf{y}_{T+1}, \mathbf{y}^{**}_{T+1}$ jsou vektory skutečných a požadovaných hodnot cílových proměnných,
- $\mathbf{x}_T, \mathbf{x}^{**}_T$ jsou vektory skutečných a požadovaných hodnot řídicích proměnných,
- \mathbf{K}, \mathbf{Q} jsou symetrické pozitivně semidefinitní matice fixních vah
- Střední hodnota se uvažuje proto, aby funkce nebyla náhodnou proměnnou
- 0,5 tam nemusí být, ale hezky se to díky nim vykrátí, když se to zderivuje
- předpokládá se, že cílové proměnné ovlivňují funkci přímo, řídicí nepřímo

Snažíme se tedy **minimalizovat vážené odchylky cílové a skutečné hodnoty cílových a řídicích proměnných**. Cílem je najít takový vektor optimálních hodnot řídicích proměnných $\mathbf{x}_T^{\text{opt}}$, který zajistí extrém této funkce. Zároveň je však třeba vzít v úvahu existující závislosti mezi řídicími a cílovými proměnnými. Omezujícími podmínkami proto bude odhadnutý model MSR, který lze zapsat v redukováném tvaru jako

$$\mathbf{y}_{T+1} = \tilde{\Pi}_1 \mathbf{y}_T + \tilde{\Pi}_2 \mathbf{x}_T + \tilde{\Pi}_3 \mathbf{z}_{T+1} + \tilde{\mathbf{v}}_{T+1}.$$

Nejprve tedy odhadneme tento model. Po odhadu modelu dosadíme $\tilde{\Pi}_1 \mathbf{y}_T + \tilde{\Pi}_2 \mathbf{x}_T + \tilde{\Pi}_3 \mathbf{z}_{T+1} + \tilde{\mathbf{v}}_{T+1}$ za \mathbf{y}_{T+1} do účelové funkce W a snažíme se nalézt takové hodnoty řídicích proměnných, aby byla hodnota účelové funkce minimální. Proto musíme položit parciální derivace W podle řídicích proměnných rovny nule. Optimální hodnoty řídicích proměnných získáme řešením následující rovnice.

$$\mathbf{x}_T^0 = \mathbf{x}_T^{**} + (\mathbf{y}_{T+1} - \mathbf{y}^{**}_{T+1}) \bar{K} \tilde{\Pi}_2 \bar{Q}^{-1}$$

Rovnici se říká lineární pravidlo optimálního řízení. Pro dlouhodobou optimální hospodářskou politiku bychom minimalizovali ztrátovou funkci za celý horizont délky h , hledali bychom tedy posloupnost vektorů optimálních hodnot řídicích proměnných.

Příklad

Zdroj: 4EK413 Nelineární modely, prof. RNDr. Václava Pánková, CSc.

Uvažujme následující keynesiánský model (Y je důchod, C spotřeba, G vládní výdaje a T daně).

$$(1A) C = \beta_1 + \beta_2 Y + \beta_3 Y_{t-1} + \beta_4 T$$

$$(1B) Y = C + G$$

Z dat, která máme k dispozici, odhadneme redukovaný tvar modelu, ve kterém budou důchod a spotřeba jakožto endogenní proměnné vysvětlovány predeterminovanými (exogenními a zpožděnými endogenními) proměnnými:

$$(2A) C_t = \pi_{10} + \pi_{11} Y_{t-1} + \pi_{12} G_{t-1} + \pi_{13} T_{t-1} + v_t \rightarrow \hat{C}_t = 15,93 + 0,58 Y_{t-1} + 0,26 G_{t-1} + 0,43 T_{t-1}$$

$$(2B) Y_t = \pi_{20} + \pi_{21} Y_{t-1} + \pi_{22} G_{t-1} + \pi_{23} T_{t-1} + w_t \rightarrow \hat{Y}_t = 6,81 + 0,84 Y_{t-1} + 1,13 G_{t-1} - 0,17 T_{t-1}$$

V minulém období jsme nastavili řídicí proměnné takto: $G_{t-1} = 13,8$ mld a $T_{t-1} = 11,6$ mld a dostali jsme následující hodnoty důchodu a spotřeby: $Y_t = 88,4$ mld, $C_t = 69,7$ mld.

V příštím období by se nám líbily vyšší hodnoty důchodu a spotřeby: $Y_{t+1} = 91,93$ mld, $C_{t+1} = 73,18$ mld. Pro povzbuzení ekonomiky je však třeba zvýšit výdaje a snížit daně, ale zase ne moc, protože by hrozil schodek státního rozpočtu. Za přijatelné bychom považovali tyto hodnoty: $G_t = 14,21$ mld a $T_t = 11,48$ mld.

Náš úkol je následující: chceme minimalizovat rozdíl skutečných a požadovaných hodnot cílových i řídicích proměnných, ale musíme přitom respektovat vztahy (2A), (2B), které mezi těmito proměnnými jsou. Jsme realisti a víme, že nemůžeme dosáhnout všeho, co bychom chtěli. Proto určíme důležitost jednotlivých požadavků, stanovíme si tedy váhy pro odchylky skutečných a požadovaných hodnot: pro spotřebu budou 0,2, pro důchod 0,8, pro vládní výdaje 0,3 a pro daně 0,7 (mohli bychom to samozřejmě stanovit i jinak). Kriteriaální funkce tedy bude mít následující tvar:

$$W = E[(\mathbf{y}_{T+1} - \mathbf{y}^{**}_{T+1})' \bar{K} (\mathbf{y}_{T+1} - \mathbf{y}^{**}_{T+1}) + (\mathbf{x}_T - \mathbf{x}^{**}_T)' \bar{Q} (\mathbf{x}_T - \mathbf{x}^{**}_T)']$$

Maticově to lze zapsat takto:

$$W = \begin{pmatrix} C_{T+1} - C_{T+1}^{**} \\ Y_{T+1} - Y_{T+1}^{**} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0,2 & 0 \\ 0 & 0,8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_{T+1} - C_{T+1}^{**} \\ Y_{T+1} - Y_{T+1}^{**} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} G_T - G_T^{**} \\ T_T - T_T^{**} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0,3 & 0 \\ 0 & 0,7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} G_T - G_T^{**} \\ T_T - T_T^{**} \end{pmatrix} \rightarrow \min$$

A „obyčejně“ nematicově takto:

$$W = 0,8(Y_{T+1} - Y_{T+1}^{**})^2 + 0,2(C_{T+1} - C_{T+1}^{**})^2 + 0,3(G_T - G_T^{**})^2 + 0,7(T_T - T_T^{**})^2 \rightarrow \min$$

Dosadíme do rovnic vše, co známe:

- ➔ za všechny proměnné s hvězdičkami dosadíme požadované hodnoty stanovené v zadání
- ➔ za C_{t+1} dosadíme $15,93 + 0,58 \cdot 88,4 + 0,26 G_t + 0,43 T_t$ (vztah 2A)
- ➔ za Y_{t+1} dosadíme $6,81 + 0,84 \cdot 88,4 + 1,13 G_t - 0,17 T_t$ (vztah 2B)

$$W = 0,8(81,06 + 1,13 G_t - 0,17 T_t - 91,93)^2 + 0,2(67,2 + 0,26 G_t + 0,43 T_t - 73,18)^2 + 0,3(G_t - 14,21)^2 + 0,7(T_t - 11,48)^2 \rightarrow \min$$

Optimální hodnoty G_t , T_t najdeme tak, že položíme parciální derivace této funkce rovny 0.

Mohli bychom chtít, aby navíc k uvedené rovnici platilo, že cílové hodnoty spotřeby a důchodu budou určitě vyšší než požadované. Pak bychom mohli přidat omezení:

$$15,93 + 0,58 Y_t + 0,26 G_t + 0,43 T_t \geq 73,18$$

$$6,81 + 0,84 Y_t + 1,13 G_t - 0,17 T_t \geq 91,93$$

Výhodou tohoto postupu je

- možnost interakce mezi cílovými proměnnými (může poklesnout jedna, když vzroste druhá, protože úroveň preferenční funkce se tím nezmění);

- nemusí se předem stanovit přesné hodnoty cílových proměnných (snažíme se jim jen přiblížit);
- nemusí být dodržen požadavek $m \geq G$.

Nevýhodou tohoto postupu je, že

- kvadratická preferenční funkce nemusí být tou nejlepší specifikací (někdy je lepší použít spíše třeba po částech kvadratickou funkci);
- váhové koeficienty jsou dost subjektivní;
- kladné odchylky od cílových hodnot mají stejnou váhu jako záporné.

OPTIMÁLNÍ ŘÍZENÍ POMOCÍ ZPĚTNÉ VAZBY

Hlavním rozdílem proti předchozí metodě je, že tyto postupy **respektují** při stanovování dlouhodobé hospodářské politiky i **zjištěné reakce endogenních proměnných** na použité nástroje hospodářské politiky. Při rozhodování se tedy bere v úvahu i zpětná vazba. Často se využívá postupů dynamického programování.

OPTIMALIZACE PŘI RACIONÁLNÍCH OČEKÁVÁNÍCH

Modely, které vycházejí z hypotézy racionálních očekávání, pracují se skutečností, že když se mění makroekonomická politika státu, mění se i očekávání ekonomických subjektů, a v důsledku zpětné vazby přestává původní model odpovídat skutečnosti. Existence očekávání totiž může ovlivnit účinnost makroekonomické politiky. Poprvé s myšlenkou brát v úvahu i vliv očekávání přišel Lucas, což vedlo k modifikaci některých používaných ekonometrických postupů.

Příkladem modelů pracujících s racionálními očekáváním jsou **neoklasický makroekonomický model** a **neklasický model racionálních očekávání**. Předpovědi vysvětlovaných endogenních proměnných se zde stanovují i s ohledem na očekávané reakce ekonomických subjektů na monetární či fiskální politiku. V určitých otázkách však existují spory.

Zastánci **neoklasického makroekonomického modelu** tvrdí, že mzdy a ceny jsou **dokonale pružné**. Podle nich tedy očekávatelná hospodářská politika nebude mít na agregátní výstup ani na nezaměstnanost vliv. Jediné, co je účinné, jsou neočekávaná opatření (třeba nepředvídatelný růst peněžní zásoby). Prosazují politiku založenou na pravidlech vedoucích k cenové stabilitě, jako třeba konstantní tempo růstu peněžní zásoby.

Zastánci **neklasického modelu (tzn. nové keynesiánské ekonomie)** mají jiný názor. V důsledku dlouhodobých kontraktů jsou podle nich mzdy, a tedy i ceny **strnulé**, nikoli dokonale elastické, takže i očekávatelná hospodářská politika má účinek, i když neočekávatelná ještě větší. Připouštění tedy i účinnost vládních stabilizačních opatření.

Podle studií hraje každopádně klíčovou roli kredibilita makroekonomické politiky.

Model racionálních očekávání může mít například takovýto tvar (jde o redukovaný tvar):

$$\mathbf{y}_t = \mathbf{B}\mathbf{y}_t^+ + \mathbf{A}\mathbf{y}_{t-1} + \mathbf{C}\mathbf{x}_t + \mathbf{b}_t + \mathbf{e}_t,$$

kde **A**, **B**, **C** jsou matice odhadnutých parametrů, **b_t** je vektor známých konstant (reprezentuje vliv autonomních proměnných), **x_t** je vektor řídicích proměnných, **y_t** a **y_{t-1}** vektory endogenních proměnných a **y_t⁺** je **vektor podmíněných očekávání** $E(\mathbf{y}_t | I_{t-1})$. I_{t-1} značí informace z předchozího období. Tento

model obsahuje pouze očekávání běžných, nikoli budoucích hodnot (ty by bylo možné zahrnout, ale model by byl složitější), přičemž tato očekávání se formují na základě informací z předcházejícího období. Problém je, že y_t^+ není měřitelnou proměnnou.

Můžeme postupovat takto. Ve výše uvedeném modelu přejdeme na obou stranách k podmíněným očekáváním a pak řešíme podle y_t^+ , čímž dostaneme model

$$y_t^+ = (I - B)^{-1} (Ay_{t-1} + Cx_t^+ + b_t^+)$$

Ten dosadíme do původního modelu, čímž z něj odstraníme nepozorovatelné proměnné. Výsledný model bude mít tvar:

$$y_t = (B - I)^{-1} (Ay_{t-1} + Cx_t^+ + b_t^+) + C(x_t - x_t^+) + (b_t - b_t^+) + v_t$$

Na tento model lze už aplikovat dříve popsané postupy. Odchylka skutečné hodnoty endogenní proměnné od jejího očekávání je důsledkem odchylek řídicích proměnných od jejich očekávání. Problémy nastávají při zahrnutí očekávání budoucích hodnot a při výskytu nelineárních vztahů.

ZDROJE

Hušek, R: Ekonometrická analýza. Nakladatelství Oeconomica, Praha 2007.