OKRUŽNÍ A ROZVOZNÍ ÚLOHY: OBCHODNÍ CESTUJÍCÍ. FORMULACE PŘI RESPEKTOVÁNÍ ČASOVÝCH OKEN

Nejprve k pojmům používaným v okružních a rozvozních úlohách:

HAMILTONŮV CYKLUS je typ cesty, kdy každý uzel grafu navštívíme právě jednou a pak se vrátíme do výchozího místa. V úloze obchodního cestujícího hledáme Hamiltonův cyklus s minimálním součtem ohodnocení hran.

EULERŮV TAH JE TAH, KTERÝ OBSAHUJE KAŽDOU HRANU PRÁVĚ JEDNOU.

EULERŮV CYKLUS JE TAKOVÝ CYKLUS, KDY KAŽDOU HRANOU V GRAFU PROJDEME PRÁVĚ JEDNOU, A PAK SE VRÁTÍME DO VÝCHOZÍHO MÍSTA. SETKÁVÁME SE S NÍM V ÚLOZE ČÍNSKÉHO LISTONOŠE.

FLEURYHO ALGORITMUS je algoritmus pro hledání Eulerova cyklu.

Ve STATICKÝCH ÚLOHÁCH známe všechny požadavky předem, v DYNAMICKÝCH ÚLOHÁCH po výjezdu vozidel přicházejí další požadavky.

V OKRUŽNÍCH ÚLOHÁCH neuvažujeme velikost požadavků, zatímco v ROZVOZNÍCH ÚLOHÁCH ano, takže zde hraje roli i kapacita vozidla.

OBCHODNÍ CESTUJÍCÍ (TRAVELLING SALESMAN PROBLEM)

Uvažujme situaci, kdy máme zadáno výchozí místo a uzly 2,3…*n* představující zákazníky, které musíme navštívit. Jejichž požadavky jsou nulové, čímž se myslí, že zde nepracujeme s omezeními na kapacitu vozidla. Vzdálenost mezi uzly *i* a *j* značíme c_{ij}. Matici vzdáleností *C* získáme tak, že určíme nejkratší možnou cestu mezi každou dvojicí uzlů, a to ať už jsou přímo spojeny hranou, nebo ne (v tom případě musíme zkrátka jet přes jiný uzel – jako bychom dodefinovali umělou hranu, jejíž délka se rovná nejkratší vzdálenosti mezi těmito uzly). Naším cílem je navštívit všechny zákazníky a vrátit se do výchozího místa tak, aby délka trasy byla minimální. Jinak řečeno, chceme najít Hamiltonův cyklus s minimálním součtem ohodnocení hran. Úloha obchodního cestujícího patří mezi NP-hard úlohy. Už pro pouhých 10 uzlů existuje přes sto tisíc různých cest.

n	Počet různých cest
3	1
5	12
7	360
10	181440
15	43589145600
20	60822550204416000
25	310224200866620000000000
30	4420880996869850000000000000000
35	147616399519802000000000000000000000000
40	10198941040598700000000000000000000000000000000
45	1329135787394220000000000000000000000000000000000000000
50	304140932017134000000000000000000000000000000000000000000000000

http://dspace.upce.cz/bitstream/10195/29491/1/PokornaP_Problem%20obchodniho_JP_2008.pdf

Lenka Fiřtová (2014)

Zavedeme proměnnou x_{ij}, která se bude rovnat 1, pokud pojedeme z uzlu *i* do *j*, jinak 0.

Úloha obchodního cestujícího může být formulována jako symetrická nebo nesymetrická. V symetrické úloze je matice vzdáleností symetrická, tedy pro každou dvojici uzlů platí, že $c_{ij} = c_{ji}$. Jde vlastně o neorientovaný graf. Co se týče matice vzdáleností a matice proměnných x_{ij}, pracujeme pouze s horní trojúhelníkovou maticí bez diagonály.

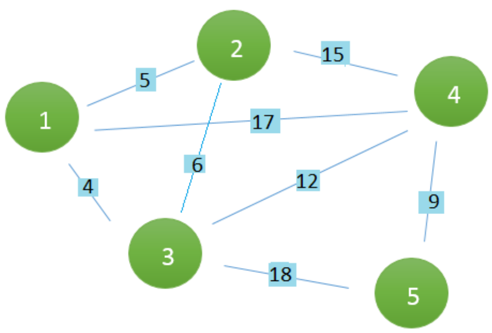
V nesymetrické úloze není matice nákladů symetrická. Náklady na dopravu z *i* do *j* mohou být jiné než náklady na dopravu z *j* do *i* (například se někde mohou vyskytovat jednosměrky apod.). V modelu existují jak proměnné x_{ij}, tak x_{ji}, pracujeme s celou maticí. Jde o orientovaný graf.

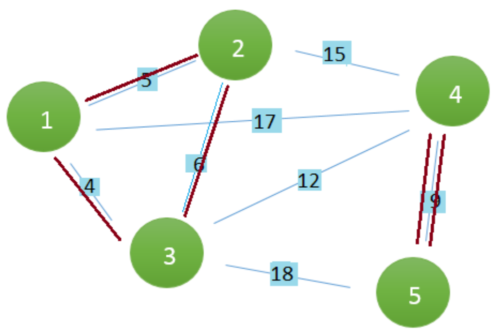
Symetrickou úlohu lze řešit i jako nesymetrickou, naopak to ale neplatí.

MODEL PRO NESYMETRICKOU ÚLOHU FORMULUJEME NÁSLEDOVNĚ:

$z = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_{ij} \rightarrow min$		*Snažíme se, aby součet vzdáleností byl minimální.*
$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = 1$	$i = 1,2 \dots n$	*(1) Pro každý uzel musí platit, že z něj právě jednou vyjedeme.*
$\sum_{i=1}^{n} x_{ij} = 1$	$j = 1,2 \dots n$	*(2)Pro každý uzel musí platit, že do něj právě jednou vjedeme.*
$x_{ij} \in \{0, 1\}$	$i, j = 1,2 \dots n$	*(3) Pojedeme z uzlu i do uzlu j?*

Problém takto formulované úlohy je, že by ve výsledném řešení mohlo vzniknout několik parciálních cyklů, a proto je nutné do úlohy ještě přidat tzv. anticyklické podmínky. Například uvažujme následující graf (bude použit i v dalším příkladu, takže je dobré se na něj podívat pořádně). Bez anticyklických podmínek by řešení vypadalo následovně:





Tohle není řešení, které chceme. Proto je potřeba přidat některou z následujících anticyklických podmínek:

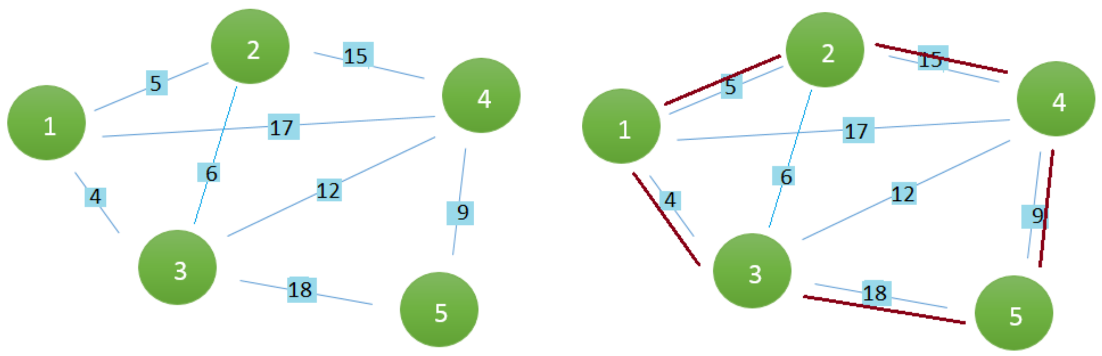
- Miller-Tucker-Zemlin:
  Zavedeme proměnnou *u*, která určuje pořadí uzlu ve výsledné optimální trase.
  Aby řešení nemohlo obsahovat parciální cykly, musí platit následující podmínka:

$$u_i - u_j + n x_{ij} \leq n - 1 \qquad i = 1,2 \dots n, j = 2,3 \dots n, i \neq j$$

V příkladu uvedeném výše máme 5 uzlů, tzn. $n = 5$. Pokud nepojedeme z uzlu *i* do uzlu *j* (tzn. $x_{ij} = 0$), bude podmínka splněna vždy. Pokud z uzlu *i* do uzlu *j* pojedeme, musí platit:

pořadí uzlu j – pořadí uzlu i ≥ 1

Jestliže má toto platit pro všechny uzly $i = 1,2 \dots n, j = 2,3 \dots n, i \neq j$, pak nemohou vzniknout parciální cykly. Řešení příkladu výše po zahrnutí uvedené podmínky vypadá následovně:



- Dantzig-Fulkerson-Johanson
  Označme *V* množinu všech uzlů a *U* podmnožinu tvořenou některými z těchto uzlů.
  Anticyklickou podmínku můžeme zapsat takto:

$$\sum_{i \in U} \sum_{j \in U} x_{ij} \leq |U| - 1, \quad U \subset V,\ 2 \leq |U| \leq n - 2$$

V příkladu výše, kde $n = 5$, existuje 10 možných podmnožin s alespoň dvěma a nejvýše třemi uzly.
|U| = 2: (1,2), (1,3), (1,4),(1,5),(2,3),(2,4), (2,5),(3,4),(3,5),(4,5)
|U| = 3: (1,2,3),(1,2,4),(1,2,5),(1,3,4),(1,3,5),(1,4,5),(2,3,4),(2,3,5),(2,4,5),(3,4,5)
Podmnožinami se čtyřmi uzly se nemusíme zabývat: mimo tuto podmnožinu by byl jen jeden zbývající uzel, kde cyklus vzniknout nemůže.
Podmínka vlastně říká, že mezi uzly dané podmnožiny musíme jet méněkrát, než kolik jich v této podmnožině je. Například mezi třemi uzly nemůžeme jet třikrát, ale nejvýše dvakrát. A to musí platit pro všechny podmnožiny o velikosti alespoň 2 a nejvýše n–2. Tak třeba v podmnožině (1,2,3) díky tomu nemůže vzniknout parciální cyklus, protože pokud by vznikl například cyklus jako na obrázku výše, pak by $x_{12} + x_{23} + x_{13} = 3$ nebylo menší nebo rovno |U| − 1 = 2.

Podmínku můžeme zapsat i takto:

$$\sum_{i \in U} \sum_{j \in V - U} x_{ij} \geq 1, \quad U \subset V,\ 2 \leq |U| \leq n - 2$$

V této formě podmínka říká, že aspoň mezi jedním uzlem z dané podmnožiny a jedním uzlem mimo danou podmnožinu musí existovat hrana, po které pojedeme.
Například parciální cykly (1,2,3) a (4,5) tudíž nemohou vzniknout, protože ani jedna z proměnných x_{14}, x_{15}, x_{51}, x_{41}, x_{24}, x_{42}, x_{25}, x_{52}, x_{34}, x_{43}, x_{35}, x_{53} není rovna jedné, takže jejich součet není větší nebo roven 1.

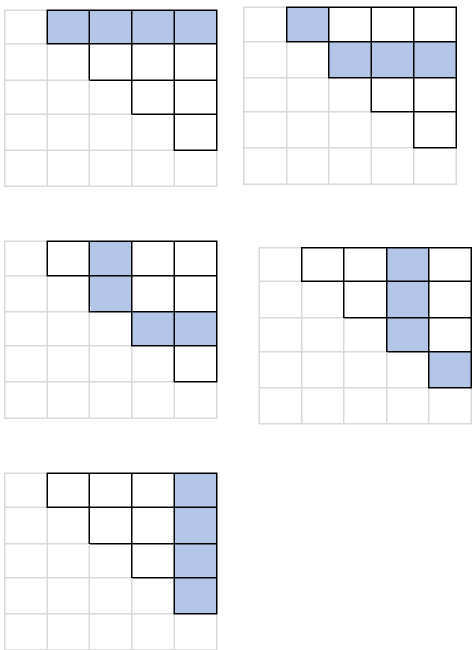
```
!Uvažujme výše uvedený příklad znázorněný v grafu. Naším úkolem je formulovat úlohu
jako nesymetrický model obchodního cestujícího spustitelný v Lingu (šlo by to
formulovat i jako symetrická úloha).

model:
sets:
uzel/1..5/:poradi;
cesta(uzel,uzel):naklady,x;
endsets

data: !pracujeme s celou maticí nákladů (formulovano jako nesymetrická úloha);
naklady =
0  5  4 16 22
5  0  6 15 24
4  6  0 12 18
16 15 12 0 9
22 24 18 9 0;
enddata

min = @sum(cesta: naklady*x);
@for(uzel(i): @sum(uzel(j): x(i,j)) = 1);!do každého uzlu jednou vjedeme a jednou z
něj vyjedeme;
@for(uzel(j): @sum(uzel(i): x(i,j)) = 1);
@for(cesta(i,j)|j#NE#1#AND#i#NE#j: poradi(i) - poradi(j) + 5*x(i,j) <=4);!smyčkové
podmínky - Miller-Tucker-Zemlin;
@for(cesta: @bin(x));
@for(cesta(i,j)|i#EQ#j: x(i,j) = 0);
end
```

MODEL PRO SYMETRICKOU ÚLOHU FORMULUJEME NÁSLEDOVNĚ:

Zavedeme opět proměnnou x_{ij}, která se bude rovnat 1, pokud pojedeme z uzlu *i* do *j*, jinak 0. Pracujeme ale pouze s proměnnými, kde $i = 1,2...n\text{-}1,\ j = i+1,i+2...n$.

$z = \sum_{i=1}^{n-1}\sum_{j=i+1}^{n} c_{ij}x_{ij} \to min$	*Snažíme se, aby byl součet ujeté vzdálenosti minimální. Pracujeme pouze s horní trojúhelníkovou maticí.*
$\sum_{j=1}^{i-1} x_{ji} + \sum_{k=i+1}^{n} x_{ik} = 2 \quad i = 1,2 \dots n$	*(1) Pro každý uzel musí platit, že do něj právě jednou vjedeme a jednou z něj vyjedeme. Proto například pro 5 uzlů musí mezi proměnnými $x_{12}, x_{13}, x_{14}, x_{15}$ být právě dvě rovny jedné, protože do uzlu 1 musíme jednou přijet a jednou z něj vyjet.*
$x_{ij} \in \{0,1\}\ \ i = 1,2...n\text{-}1,\ j = i+1,i+2...n$	*(2) Pojedeme z uzlu i do uzlu j?*
$\sum_{i\in U}\sum_{\substack{j\in U \\ i<j}} x_{ij} \le \lvert U\rvert - 1,\quad U \subset V, 3 \le \lvert U\rvert \le n-3,$	*(3) Poslední podmínkou je opět anticyklická podmínka.*

Ad podmínka (1): například pro 5 uzlů bychom v matici proměnných sčítali takto:



Ad podmínka (3): Anticyklická podmínka odpovídá jedné z anticyklických podmínek nesymetrické úlohy, jen v ní jsou trojky místo dvojek. Důvod je ten, že ani mezi dvěma uzly nemůže v symetrické úloze vzniknout parciální cyklus, protože v modelu jsou orientované hrany, takže pro vznik cyklu potřebujeme uzly alespoň tři.

Existují určité speciální typy úlohy obchodního cestujícího.

V metrické úloze obchodního cestujícího musí pro všechna *i, j*, k platit nerovnost $c_{ij} + c_{jk} \geq c_{ik}$.

V Euklidovské úloze obchodního cestujícího musí platit vztah $c_{ij} = \sqrt{(X_i - X_j)^2 + (Y_i - Y_j)^2}$, kde X_i, X_j jsou souřadnice uzlu *X*, Y_i, Y_j pak souřadnice bodu *Y*.

V otevřené úloze obchodního cestujícího se vozidlo nevrací do výchozího místa.

V úloze s časovými okny navíc obchodní cestující musí navštívit zákazníky pouze v určitém časovém intervalu. Začátek a konec intervalu požadované doby návštěvy pro *i*-tého zákazníka označme a_i, b_i, tzn. zákazníka musíme navštívit v časovém okně $\langle a_i, b_i \rangle$.

K matici c_{ij} musíme mít tudíž navíc k dispozici matici d_{ij}, v níž budou informace o době přejezdu mezi jednotlivými uzly.

Zavedeme proměnnou x_{ij}, která se bude rovnat 1, pokud pojedeme z uzlu *i* do *j*, jinak 0.

Dále zavedeme proměnnou t_i, což bude čas, v němž je navštíven uzel i.

Celý model má tvar:

$z = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_{ij} \to min$		*Snažíme se, aby součet vzdáleností byl minimální.*
$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = 1$	$i = 1,2 \dots n$	*(1) Pro každý uzel musí platit, že z něj právě jednou vyjedeme.*
$\sum_{i=1}^{n} x_{ij} = 1$	$j = 1,2 \dots n$	*(2)Pro každý uzel musí platit, že do něj právě jednou vjedeme.*
$x_{ij} \in \{0, 1\}$	$i, j = 1,2 \dots n$	*(3) Pojedeme přes z uzlu i do uzlu j?*
$t_1 = 0$		*(4) Čas výjezdu nastavíme na nulu.*
$a_i \leq t_i \leq b_i$	$i = 2,3 \dots n$	*(5) Pro všechny uzly (kromě prvního) musí platit, že čas, ve kterém jej navštívíme, spadá do požadovaného časového okna.*
$t_i + d_{ij} - M(1 - x_{ij}) \leq t_j$	$i = 1,2 \dots n,$ $j = 2,3 \dots n, i \neq j$	*(6) M je nějaké velké číslo, například by to mohlo být 1000. Pokud nejedeme z i do j, pak bude $x_{ij} = 0$ a podmínka bude splněna vždy. Pokud ale pojedeme z i do j, pak musí platit, že uzel j nenavštívíme dříve, než kolik činí čas návštěvy uzlu i plus doba přejezdu z i do j.*

ZDROJE:

Ing. J. Fábry, Ph.D.: přednášky 4EK314 Diskrétní modely, 2011.